No d'enregistrement
au C. N. R. S.
A O 8203.

THESE

DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A L'UNIVERSITE DE PARIS VI

par

Claude Georges BONTHOUX

pour obtenir
le grade de Docteur Es - Sciences

CONTRIBUTION
A L'ETUDE DE LA STABILITE D'ATTITUDE
DES SATELLITES ARTIFICIELS PASSIFS
PARCOURANT UNE
TRAJECTOIRE ELLIPTIQUE

Soutenue le 26 Avril 1973 devant la commission d'examen

R SIESTRUNCK	Président
P BROUSSE	Rapporteur
Y THIRY	Examinateur

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548020_0004

No d'enregistrement
au C. N. R. S.
A O 8203.

THESE

DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A L'UNIVERSITE DE PARIS VI

par

Claude Georges BONTHOUX

pour obtenir
le grade de Docteur Es - Sciences

CONTRIBUTION
A L'ETUDE DE LA STABILITE D'ATTITUDE
DES SATELLITES ARTIFICIELS PASSIFS
PARCOURANT UNE
TRAJECTOIRE ELLIPTIQUE

Soutenue le 26 Avril 1973 devant la commission d'examen

R SIESTRUNCK	Président
P BROUSSE	Rapporteur
Y THIRY	Examinateur

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

AVANT - PROPOS

Les récents et rapides progrès, dans le domaine spatial, ont remis à l'ordre du jour différents problèmes de mécanique théorique. Il s'agit de la dynamique des satellites artificiels et plus particulièrement de l'analyse de leurs mouvements autour du centre d'inertie.

Le problème le plus important actuellement est celui de l'étude de la stabilité d'attitude des satellites sur leur trajectoire.

L'attitude d'un véhicule est définie par son orientation relativement à des axes de référence, convenablement choisis, formant un repère inertiel.

Ce problème a déjà une longue histoire. Il faut en rechercher l'origine au XVIIIe siècle où de nombreux mathématiciens tentèrent d'expliquer les mouvements des satellites des planètes de notre système solaire, et plus précisément ceux de libration de la lune et de précession luni-solaire et nutation lunaire de l'axe terrestre.

Les précurseurs furent d'Alembert (1754), Lagrange (1788), Laplace (1798), Poisson (1827), Poinsot (1834), Jacobi (1849), Delaunay (1867), Poincaré (1899).

Les lancements de plus en plus fréquents de satellites scientifiques ayant à accomplir des missions de plus en plus délicates nécessitent une précision accrue de l'orientation de ceux-ci.

Chaque satellite placé sur orbite a en effet une mission très stricte à exécuter : photographie, météorologie, géodésie, communications, observation, navigation, etc...

Pour accomplir sa mission avec le maximum de précision il doit avoir une position bien déterminée par rapport à un référentiel fixé en fonction de ses buts.

.../...

Or, sur sa trajectoire, il est soumis à de multiples actions perturbatrices, appliquées en différents points du satellite qui ont tendance à l'éloigner de son orientation idéale, si il y a été placé au moment de l'injection.

Il s'agit donc de trouver des moyens qui, soit ramèneront le satellite à sa position d'origine, s'il en est parti, soit au contraire, l'obligeront à conserver son orientation initiale.

Les procédés du premier type sont du ressort du contrôle d'attitude au sens asservissement et sont obligatoirement actifs (éjection par microvannes ou micropropulseurs, de masse, provenant de réservoirs sous pression, de vaporisateurs ou de génératrices à plasma).

Les moyens du deuxième type appartiennent à la stabilisation.

La stabilisation autour d'une position d'équilibre relatif est l'analyse des petits mouvements ou librations résultant de l'action des couples perturbateurs d'attitude. Cette stabilisation peut-être active ou passive.

La stabilisation passive est définie par le fait qu'elle ne nécessite pas de source d'énergie pour son fonctionnement.

On étend fréquemment cette définition à des systèmes qui n'utilisent qu'une faible puissance pour entretenir la rotation de gyroscopes, de volants d'inertie ou du satellite lui-même, sans demander de contrôle effectué par une boucle de retour.(stabilisation semi-passive).

Les satellites scientifiques inhabités devront avoir une durée de vie très longue pour être rentables. Cet impératif élimine pour ce genre de satellite la stabilisation active, qui, par sa complexité, en augmente le poids, le volume et le prix de revient, et en diminue la fiabilité.

Le principal attrait de la stabilisation passive est sa simplicité. Cette qualité entraîne un prix de revient faible et une longue sécurité de fonctionnement. Un des inconvénients de ce mode de stabilisation est qu'il réclame une assez bonne précision des conditions d'injection (orientation et vitesses angulaires initiales).

Il est alors nécessaire de définir des domaines de capture possibles pour un tel satellite.

Un satellite sera dit capturé lorsqu'il ne sera plus sujet qu'à des mouvements de libration.

.../...

La solution directe du problème de stabilisation passive sur orbite excentrique en tenant compte de tout ou partie des couples d'ambiance s'avère très complexe.

Nous avons donc procédé par étapes successives dans notre travail et avons commencé par une étude très souvent négligée jusqu'à maintenant dans les différentes publications sur ce sujet.

Il s'agit du couplage existant entre les mouvements du centre d'inertie et autour de celui-ci.

Bien que son importance soit faible pour tous les satellites lancés actuellement, il est néanmoins nécessaire de préciser l'influence de ce couplage à l'annonce de la mise en place de stations spatiales de grande dimension.

L'apport original de cette partie est l'étude systématique des conditions d'orientation d'un corps ayant la forme d'un ellipsoïde de révolution pour que puissent exister des trajectoires planes circulaires ou non. Nous pouvons alors intégrer complètement les équations et définir le lien entre les deux mouvements.

Après avoir approfondi l'étude de l'interaction des deux mouvements de translation et rotation dans une première partie, et précisé ainsi la valeur des hypothèses utilisées pour la suite de notre travail, nous abordons dans une seconde partie un problème en réalité très lié aux résultats précédents : Parmi toutes les actions perturbatrices d'attitude d'un satellite, l'excentricité de la trajectoire et le gradient de gravité terrestre peuvent être considérés comme prépondérants.(*)

Nous avons donc résolu, d'abord numériquement, puis dans certains cas analytiquement, les équations du mouvement autour du centre des masses d'un satellite rigide, soumis au gradient de gravité, pour tenter d'en déduire l'influence de l'excentricité de l'orbite sur la stabilité d'attitude.

L'apport nouveau dans ce domaine est l'utilisation des paramètres de Rodrigues-Hamilton ou des "quaternions" qui facilitent une résolution "machine" et qui peuvent réduire de 40 à 50% le temps de calcul. L'étude analytique est rendue difficile par le fait que les équations décrivant le phénomène sont toujours fortement non linéaires.

Dans des cas très simples (orbite circulaire et amplitude des angles d'attitude très faibles) nous pouvons linéariser et en déduire la stabilité du mouvement par les critères habituels

---

(*) Wiggins Lyle E. "Relative Magnitudes of the Space-Environment Torques on a satellite" AIAA Journal. Vol.2 n°4 1964. pp.770-771.

.../...

des équations différentielles linéaires.

La plupart du temps, il faut faire appel aux très nombreux résultats de mécanique non linéaire (Lyapunov, Floquet, Poincaré, Krylov, Bogoliubov, Mitropolsky).

La dernière originalité de ce travail est l'étude très détaillée d'une équation différentielle du second ordre non linéaire définissant les oscillations du satellite dans le plan de l'orbite excentrique. Une résolution numérique nous incite à démontrer l'existence de solutions périodiques de période 2π pour cette équation. La présence de ces solutions est d'ailleurs vérifiée par d'autres méthodes : "Balance harmonique", méthode asymtotique de Bogoliubov et Mitropolsky, méthode des conséquences de Poincaré.

L'existence de solutions périodiques est démontrée par transformation de l'équation différentielle en équation intégrale du type de Hammerstein.

Une nouvelle démonstration utilisant la méthode de Césari vient confirmer l'existence d'au moins une solution périodique pour cette équation.

TABLE DES MATIERES

		Pages
Avant propos		2
Table des matières		6
PREMIERE PARTIE :	Sur le couplage des mouvements de translation et rotation des corps célestes artificiels.	
Chapitre I -	Equations générale	10
	I.1 Introduction	10
	I.2 Mise en équations du problème	10
II -	Premier cas particulier de dissociation et d'intégration	17
	II.1 Corps central homogène et sphérique - Satellite de forme quelconque - Trajectoire quelconque	17
	II.2 Cas du corps de révolution	24
III -	Cas d'un corps de révolution soumis à un corps central sphérique et homogène. Mouvements plans du centre des masses	25
	III.1 Equations générales	25
	III.2 Mouvements plans du centre des masses	27
	III.3 L'axe de révolution est dans un plan perpendiculaire au rayon vecteur - L'orbite est quelconque	28
	III.4 L'orbite est circulaire. L'axe de révolution est colinéaire au rayon vecteur	30
IV -	Cas d'un corps de révolution soumis à un corps central sphérique homogène - Mouvements circulaires plans du centre des masses	31
	IV.1 Conditions d'existence	31
	IV.2 Le mouvement de G est circulaire uniforme	31
	IV.3 L'axe de révolution est perpendiculaire au plan de l'orbite	32
	IV.4 Conclusions	32
	IV.5 Remarque	34
V -	Quelques évaluations de l'influence du mouvement de rotation sur le mouvement de translation	35
	V.1 Introduction	35
	V.2 Le corps a trois moments principaux d'inertie différents et se déplace sur une orbite circulaire plane	35
	V.3 Le corps est de révolution et se déplace sur une orbite quelconque	36
VI -	Conclusions sur la 1ère partie.	

Pages

DEUXIEME PARTIE : Attitude d'un Satellite de forme quelconque soumis au gradient de gravité d'une terre sphérique homogène et parcourant une orbite elliptique 42

Chapitre I - Système de référence et équations générales 43

II - Remarques d'ordre général et premières conclusions dans le cas des mouvements de faible amplitude sur orbite circulaire ou légèrement elliptique 48

II.1 Cartes des configurations 48

II.2 Cas d'une orbite circulaire : point de vue énergétique 52

II.3 Cas particulier de l'orbite circulaire et des petites oscillations en roulis, lacet, tangage - Solutions des équations linéarisées 58

II.4 Approche analytique de la solution dans le cas des petits mouvements sur orbite légèrement elliptique par la méthode d'Hamilton-Jacobi - Résonance "externe" 64

III - Résolution numérique des équations générales Premières conséquences 69

III.1 Système d'équations à résoudre 69

III.2 Excentricité nulle 72

III.3 Excentricité différente de zéro 76

III.4 Conséquences 85

quelconque

IV - Grandes oscillations d'un corps de forme dans le plan de tangage 91

IV.1 Equation générale 91

IV.2 Solution numérique 93

IV.3 Solutions périodiques - Méthode des conséquents de Poincaré 101

IV.4 Recherche analytique de solutions périodiques - 1e, 2e,3e harmonique, le sous-harmonique 116

IV.5 Méthode de Bogliubov et Mitropolsky. Influence en première approximation de la force externe 4e sin V sur le mouvement du système 126

IV.6 Solution exacte de l'équation dans le cas d'une orbite circulaire 132

IV.7 Existence de solutions périodiques par transformation de l'équation différentielle en équation intégrale de type de Hammerstein 134

IV.8 Recherche de l'existence des solutions périodiques impaires d'un système différentiel de second ordre par la méthode de Cesari 141

Pages

Chapitre V - Conclusions sur la 2ème partie 155

Annexe 1 - Fonction de Forces d'une terre sphérique homogène 157

" 2 - Quaternions 160

" 3 - Programmes 167

Table des figures 179

Bibliographie 180

PREMIERE P A R T I E

SUR LE COUPLAGE DES MOUVEMENTS DE TRANSLATION ET ROTATION DES CORPS CELESTES ARTIFICIELS

I - EQUATIONS GENERALES

I - 1 Introduction

Il est bien connu qu'en mécanique céleste classique, on regarde séparément les mouvements de translation et de rotation des corps célestes.

On considère d'abord le problème du mouvement de translation du corps comme le mouvement d'un point matériel et on regarde ensuite le mouvement de rotation de ce corps autour de son centre d'inertie en supposant connues les coordonnées de ce centre et leur évolution dans le temps. On suppose ainsi que le mouvement de rotation autour du centre des masses dépend du mouvement de translation, tandis qu'on néglige l'effet de rotation sur le mouvement de ce centre.

Il est cependant nécessaire d'examiner plus sérieusement le mouvement complet du corps sans le diviser en deux mouvements séparés de translation et rotation. En effet, dans un champ de gravitation non homogène, la translation du centre des masses ne reste pas longtemps indépendante du mouvement de rotation autour de ce dernier. Il existe pourtant quelques cas particuliers où l'on peut trouver des mouvements découplés. Notre but est ici de les mettre en évidence.

Les premiers travaux sur ce sujet furent faits par V.T. KONDURAR' (*) puis par G.N. DUBOSHIN (**). Leurs principaux résultats sont exprimés dans un rapport que le Professeur DUBOSHIN présenta au Symposium de l'Union Internationale de Mécanique Théorique et Appliquée à Paris en mai 1962 (***).

---

* KONDURAR' V.T. "The problem of the motion of two ellipsoïds under the action of mutual Attraction". Astron.Zhurnal, Vol. 13 n° 6 pp. 563-588 (1936)

** DUBOSHIN G.N. "One particular case of the problem of the translational rotational motion of two bodies". Astron Zhurnal Vol. 36 n° 1

*** DUBOSHIN G.N. "Sur le mouvement de translation-rotation des corps célestes artificiels" IUTAM Symposium Paris 28-30 mai 1962.
pp. 14-20
Dynamics of satellites edited by Maurice ROY.

Après avoir développé les équations générales du mouvement du centre d'inertie et autour de celui-ci, le Professeur DUBOSHIN étudie plus particulièrement l'évolution d'un segment matériel sans épaisseur et les conditions d'existence d'une trajectoire plane pour un tel solide (**). Les orientations stables déterminées sur cet exemple vérifient également les équations générales si l'orbite est circulaire plane et si le corps est de forme quelconque (***).

Madame Madeleine PASCAL (****) en reprenant l'idée de l'auteur a montré qu'également,un corps ayant la forme d'un triple batonnet satisfaisait à ces mêmes conditions de mouvement (***) et en a étudié la stabilité.

Nous avons, ici, étendu les résultats du Professeur DUBOSHIN pour un segment matériel, au cas d'un corps ayant une symétrie de révolution et nous avons étudié systématiquement quelles sont les orientations possibles d'un tel corps pour que puissent exister des trajectoires planes,qu'elles soient circulaires ou non. Ce développement nous permet d'obtenir logiquement certains cas particuliers développés par le Professeur DUBOSHIN (***).

Anis KLAT (*****) montre par une autre méthode qu'il existe des trajectoires planes pour un solide moyennant certaines conditions d'orientation du corps qu'il ne précise pas, et les conditions nécessaires et suffisantes suivantes :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z_1}\right)_{z_1=o} = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z_1^2}\right)_{z_1=o} \neq 0$$

U est la fonction de forces due à la terre supposée sphérique homogène sur le corps, z_1 est la variable définissant la cote d'un point relativement au plan de l'orbite $z_1 = 0$.

Les équations différentielles du problème des n corps, non ramenées à leur centre des masses, telles qu'elles sont établies en mécanique céleste classique, ne sont pas intégrables. Le système d'ordre 12 n (3 équations du second ordre pour le mouvement de chaque centre des masses et trois autres pour le mouvement autour du centre des masses) ne possède que les dix intégrales premières classiques (6 pour le barycentre du système, 3 pour le théorème du moment cinétique et 1'intégrale des forces vives).

**** Mme Madeleine PASCAL "Sur le mouvement d'un triple batonnet dans un champ Newtonien" C.R. Acad. Sciences Paris t.265, 6 Déc. 1967, pp.790-792.

***** KLAT Anis "Trajectoires planes dans le problème de deux corps solides" Publications de l'Université Libanaise - Section des études scientifique VI - Beyrouth 1968.

.../...

Pour deux corps seulement en présence, le problème est aussi inextricable, mais son analyse peut permettre d'énoncer certaines conditions conduisant à une intégration exacte des équations.

I - 2 Mise en équations du problème

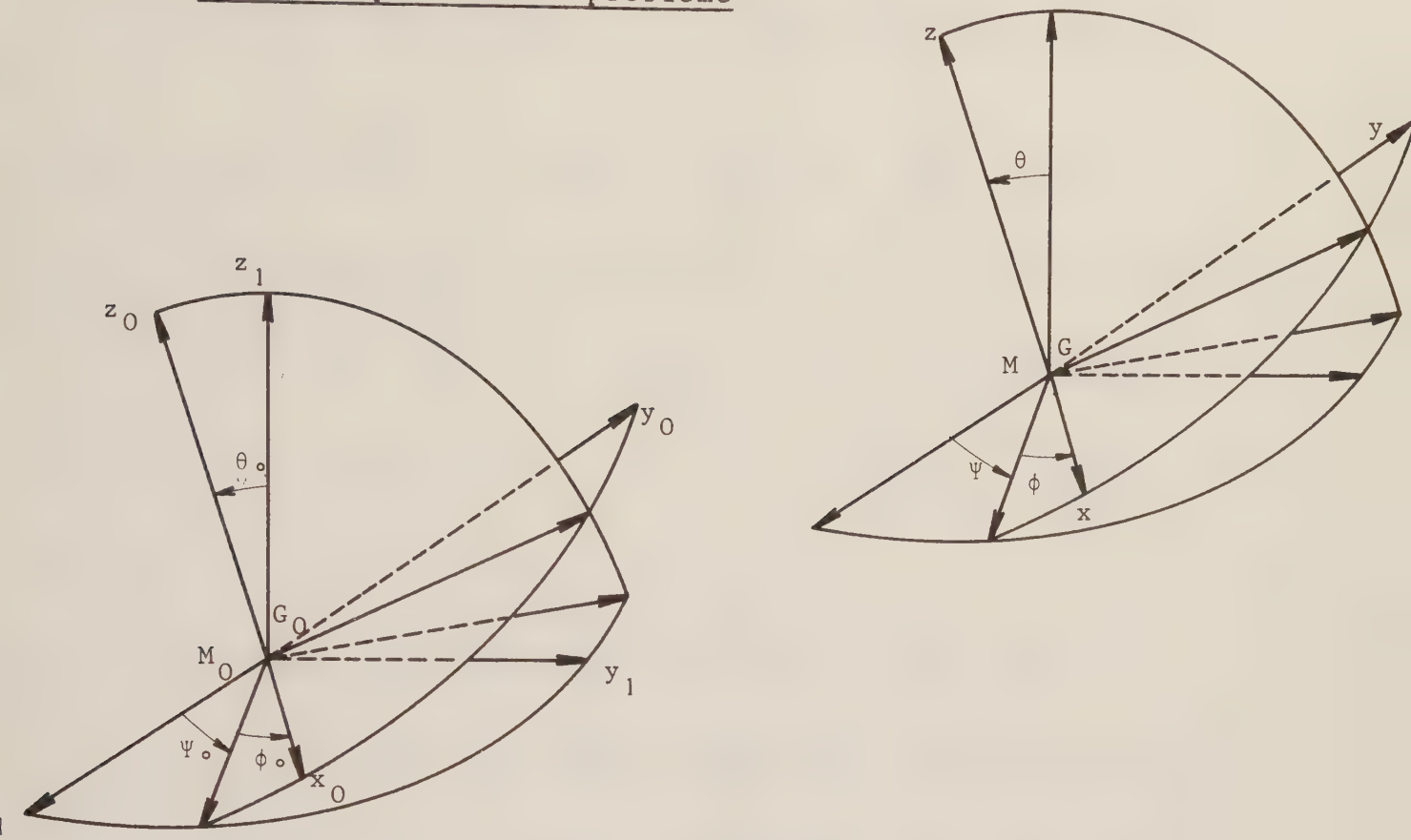


Fig. 1

Considérons deux corps rigides M_0 et M (terre et satellite par exemple). Nous appellerons m_0 et m leur masse, A_0, B_0, C_0, A,B,C leurs moments principaux d'inertie respectifs. Nous ramènerons, comme on le fait en mécanique céleste, l'origine du système d'axes de référence au corps central.

.../...

Soient Ψ_0, φ_0, θ_0, Ψ, φ, θ les angles d'Euler qui définissent le mouvement des masses autour de leur centre d'inertie.

x_1, y_1, z_1 représentent les coordonnées de M relativement au trièdre de référence centré en M_0 ; x_0 y_0 z_0, x y z sont les deux trièdres liés à M_0 et M.

La fonction de forces correspondant à l'attraction mutuelle des deux corps de forme quelconque se calcule de la façon suivante :

$$U = f \iint_{M_0} dm_0 \iint_{M} \frac{dm}{\Delta} = U\,(x_1, y_1, z_1, \Psi_0, \varphi_0, \theta_0, \Psi, \varphi, \theta)$$

Δ est la distance entre les deux éléments de masse dm_0 et dm s'attirant mutuellement selon la loi de Newton.

Les équations s'écrivent alors :

- pour le centre des masses de M (*) :

$$(I - 2 - 1)\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dfrac{m_0 + m}{m_0 m} \dfrac{\partial U}{\partial x_1} \\ \ddot{y}_1 = \dfrac{m_0 + m}{m_0 m} \dfrac{\partial U}{\partial y_1} \\ \ddot{z}_1 = \dfrac{m_0 + m}{m_0 m} \dfrac{\partial U}{\partial z_1} \end{cases}$$

---

* TISSERAND F. Traité de Mécanique Céleste - Tome 1 - pp. 71-75 (nouveau tirage 1960)

- pour le mouvement autour de G_0 centre d'inertie de M_0 (**) :

$$(I-2\text{-}2)\quad \begin{cases} A_0 \dfrac{dp_0}{dt} + (C_0 - B_0)\, q_0 r_0 = \dfrac{\sin\varphi_0}{\sin\theta_0}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \Psi_0} - \cos\theta_0 \dfrac{\partial U}{\partial \varphi_0}\right) + \cos\varphi_0 \dfrac{\partial U}{\partial \theta_0} \\ B_0 \dfrac{dq_0}{dt} + (A_0 - C_0)\, r_0 p_0 = \dfrac{\cos\varphi_0}{\sin\theta_0}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \Psi_0} - \cos\theta_0 \dfrac{\partial U}{\partial \varphi_0}\right) - \sin\varphi_0 \dfrac{\partial U}{\partial \theta_0} \\ C_0 \dfrac{dr_0}{dt} + (B_0 - A_0)\, p_0 q_0 = \dfrac{\partial U}{\partial \varphi_0} \end{cases}$$

Les composantes sur les axes principaux d'inertie de la rotation instantanée étant :

$$(I-2\text{-}2\text{ bis})\quad \begin{cases} P_0 = \dot{\Psi}_0 \sin\theta_0 \sin\varphi_0 + \dot{\theta}_0 \cos\varphi_0 \\ q_0 = \dot{\Psi}_0 \sin\theta_0 \cos\varphi_0 - \dot{\theta}_0 \sin\varphi_0 \\ r_0 = \dot{\Psi}_0 \cos\theta_0 + \dot{\varphi}_0 \end{cases}$$

- pour le mouvement autour de G, centre d'inertie de M :

$$(I-2\text{-}3)\quad \begin{cases} A \dfrac{dp}{dt} + (C - B)\, qr = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \Psi} - \cos\theta \dfrac{\partial U}{\partial \varphi}\right) + \cos\varphi \dfrac{\partial U}{\partial \theta} \\ B \dfrac{dp}{dt} + (A - C)\, rp = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\theta}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \Psi} - \cos\theta \dfrac{\partial U}{\partial \varphi}\right) - \sin\varphi \dfrac{\partial U}{\partial \theta} \\ C \dfrac{dr}{dt} + (B - A)\, pq = \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} \end{cases}$$

avec :

$$(I-2\text{-}3\text{ bis})\quad \begin{cases} p = \dot{\Psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi \\ q = \dot{\Psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi \\ r = \dot{\Psi} \cos\theta + \dot{\varphi} \end{cases}$$

** TISSERAND F. Traité de Mécanique Céleste - Tome 2 p. 377 (nouveau tirage 1960)

Le système est encore d'ordre 18, mais ne possède plus que 4 intégrales premières, car la translation d'axes tient compte implicitement du théorème de la résultante cinétique.

Ces intégrales sont les suivantes :

$$
\left(\begin{array}{l}
\left(\dfrac{m_0 m}{m_0+m}\right)(y_1\dot{z}_1 - z_1\dot{y}_1) + A_0p_0a^0_{11} + B_0q_0a^0_{12} + C_0r_0a^0_{13} + Ap\,a_{11} + B_q\,a_{12} + Cr\,a_{13} = C \\
\\
\left(\dfrac{m_0 m}{m_0+m}\right)(z_1\dot{x}_1 - x_1\dot{z}_1) + A_0p_0a^0_{21} + B_0q_0a^0_{22} + C_0r_0a^0_{23} + Ap\,a_{21} + B_q\,a_{22} + Cr\,a_{23} = C \\
\\
\left(\dfrac{m_0 m}{m_0+m}\right)(x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1) = A_0p_0a^0_{31} + B_0q_0a^0_{32} + C_0r_0a^0_{33} + Ap\,a_{31} + Bq\,a_{32} + Cr\,a_{33} = C \\
\\
\left(\dfrac{m_0 m}{m_0+m}\right)(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + A_0p_0^2 + B_0q_0^2 + C_0r_0^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2U + h
\end{array}\right. \qquad (I - 2\text{-}4)
$$

Les a_{ik} et a^0_{ik} sont les cosinus directeurs des axes principaux des corps M et M_0 relativement au trièdre de direction fixe $x_1y_1z_1$.

Si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ sont les vecteurs unitaires portés par $x, y, z, x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$, on peut écrire :

$$
\begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \qquad (I - 2\text{-}5)
$$

$$
\begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a^0_{11} & a^0_{12} & a^0_{13} \\ a^0_{21} & a^0_{22} & a^0_{23} \\ a^0_{31} & a^0_{32} & a^0_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{pmatrix} \qquad (I - 2\text{-}6)
$$

Dans le cas trival où les corps sont sphériques et homogènes, les systèmes précédents (I - 2-1), (I - 2-2), (I - 2-3) sont dissociables et les équations sont toutes intégrables. Le corps M a un mouvement képlérien autour de M_0 et les deux corps M et M_0 tournent uniformément dans l'espace, chacun autour d'une direction fixe.

Si les deux corps sont tout à fait quelconques, les équations précédentes n'ont pas d'autres intégrales que (I - 2-4) et les mouvements de translation et rotation sont couplés.

Pour obtenir d'autres intégrales premières et avoir ainsi des possibilités de dissociation et d'intégration du système complet, il est nécessaire de se placer dans certains cas particuliers.

II - PREMIER CAS PARTICULIER de DISSOCIATION et d'INTEGRATION

II.1 CORPS CENTRAL HOMOGENE ET SPHERIQUE. SATELLITE DE FORME QUELCONQUE TRAJECTOIRE QUELCONQUE

Supposons, dans un premier temps, que le corps M_0 soit une sphère ayant une distribution massique homogène. La fonction de forces U_s ne dépend plus alors des angles d'Euler Ψ_0, φ_0, θ_0 et le corps M_0 tourne uniformément autour d'une direction fixe.

En effet, si Δ est la distance de G_0 centre des masses de M_0 à dm, élément de masse de M :

$$U_s = fm_0 \iiint_M \frac{dm}{\Delta} = U_s \ (x_1, y_1, z_1, \Psi, \varphi, \theta)$$

Les équations I.2.1. et I.2.2. deviennent :

$$\text{(II.1.1)} \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 = \dfrac{m_0+m}{m_0 m} \dfrac{\partial U_s}{\partial x_1} \\ \ddot{y}_1 = \dfrac{m_0+m}{m_0 m} \dfrac{\partial U_s}{\partial y_1} \\ \ddot{z}_1 = \dfrac{m_0+m}{m_0 m} \dfrac{\partial U_s}{\partial z_1} \end{cases}$$

$$\text{(II.1.2)} \quad \begin{cases} P_0 = \text{const.} \\ q_0 = \text{const.} \\ r_0 = \text{const.} \end{cases}$$

Les équations I.2.3 et les intégrales premières I.2.4 s'écrivent :

$$(II.1.3)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)\,qr = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\dfrac{\partial U_s}{\partial \psi} - \cos\theta\dfrac{\partial U_s}{\partial \varphi}\right) + \cos\varphi\dfrac{\partial U_s}{\partial \theta} \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)\,pr = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\dfrac{\partial U_s}{\partial \psi} - \cos\theta\dfrac{\partial U_s}{\partial \varphi}\right) - \sin\varphi\dfrac{\partial U_s}{\partial \theta} \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)\,pq = \dfrac{\partial U_s}{\partial \varphi} \end{cases}$$

avec p, q, r précédemment définis.

$$(II.1.4)\quad \begin{cases} \dfrac{m_0 m}{m_0+m}\,(y_1\dot{z}_1 - z_1\dot{y}_1) + Ap\,a_{11} + Bq\,a_{12} + Cr\,a_{13} = C_1 \\ \dfrac{m_0 m}{m_0+m}\,(z_1\dot{x}_1 - x_1\dot{z}_1) + Ap\,a_{21} + Bq\,a_{22} + Cr\,a_{23} = C_2 \\ \dfrac{m_0 m}{m_0+m}\,(x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1) + Ap\,a_{31} + Bq\,a_{32} + Cr\,a_{33} = C_3 \\ \dfrac{m_0 m}{m_0+m}\,(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2U_s + h \end{cases}$$

Dans cette hypothèse, si nous négligeons, dans le calcul de la fonction de forces U_s, les termes d'ordre supérieur à $\dfrac{1}{R^3}$, un calcul classique nous donne (★) :

$$(II.1.5)\quad U_s = fm_0\left[\frac{m}{R} + \frac{3}{2R^3}\left(\frac{A+B+C}{3} - I_{G_0G}\right) + \ldots\ldots\right]$$

I_{G_0G} est alors le moment d'inertie du corps M par rapport à la direction $\overrightarrow{G_0G}$. $\overrightarrow{G_0G} = \vec{R}$.

Les angles d'Euler interviennent seulement dans l'expression de I_{G_0G}.

★ TISSERAND F. Traité de Mécanique céleste. Tome 1, p. 61 (nouveau tirage 1960)

En introduisant les cosinus directeurs α , β , γ de la direction $\vec{G_0G}$ par rapport aux axes principaux d'inertie du corps M, on peut donner une nouvelle expression très intéressante de la fonction de forces.

$$(II.1.6)\quad U_s = fm_0 \left[\frac{m}{R} + \frac{3}{2R^3}\frac{A+B+C}{3} - \frac{3}{2R^3}\left(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2\right) + \ldots. \right]$$

Si dans le développement de U_s, on néglige les termes du troisième ordre en $\frac{1}{R}$ (corps M à distribution homogène sphérique), les équations (II.1.1) et (II.1.3) peuvent se séparer en deux systèmes indépendants dont l'un, (II.1.1.), définit le mouvement du centre des masses M par rapport à G_0 sous l'action d'une force newtonienne, et l'autre, (II.1.3), la rotation du corps autour de son centre d'inertie. Le mouvement du corps M relativement à son centre des masses est alors un mouvement à la "Poinsot".

Si nous conservons dans U_s les termes du troisième ordre en $\frac{1}{R}$ les équations doivent être intégrées simultanément et le couplage est total. (corps M de forme quelconque). Nous y reviendrons plus loin pour étudier des mouvements particuliers de ce type.

Si pourtant l'on néglige les termes en $\frac{1}{R}$ d'ordre supérieur à 3, non dans la fonction de forces U_s, mais dans les seconds membres des équations (II.1.1), le mouvement de translation du corps ne dépend pas de son mouvement de rotation Par contre, les équations (II.1.3),définissant les angles d'Euler, écrites avec la même précision, contiendront des termes dépendant des coordonnées du centre des masses et le mouvement de rotation du corps dépendra de son mouvement de translation. Il faut remarquer cependant que le mouvement du centre d'inertie de M ne se fait plus sous l'action d'un potentiel newtonien, mais de quelque chose d'un petit peu différent.

Dans cette dernière hypothèse, évaluons en effet $\frac{\partial U_s}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial U_s}{\partial \varphi}$

$$R^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

D'après I.2.5 :

$$\alpha = \frac{1}{R}\vec{R}.\vec{i} = \frac{\vec{R}}{R}\cdot\left(a_{11}\vec{i}_1 + a_{21}\vec{j}_1 + a_{31}\vec{k}_1\right) = a_{11}\frac{x_1}{R} + a_{21}\frac{y_1}{R} + a_{31}\frac{z_1}{R}$$

$$\beta = \frac{1}{R}\vec{R}.\vec{j} = \frac{\vec{R}}{R}\cdot\left(a_{12}\vec{i}_1 + a_{22}\vec{j}_1 + a_{32}\vec{k}_1\right) = a_{12}\frac{x_1}{R} + a_{22}\frac{y_1}{R} + a_{32}\frac{z_1}{R}$$

$$\gamma = \frac{1}{R}\vec{R}.\vec{k} = \frac{\vec{R}}{R}\cdot\left(a_{13}\vec{i}_1 + a_{23}\vec{j}_1 + a_{33}\vec{k}_1\right) = a_{13}\frac{x_1}{R} + a_{23}\frac{y_1}{R} + a_{33}\frac{z_1}{R}$$

En fonction des angles d'Euler, les cosinus directeurs de (I.2.5) s'écrivent :

$a_{11}=\cos\Psi\cos\phi-\cos\theta\sin\Psi\sin\phi$ $a_{12}=-\cos\Psi\sin\phi-\cos\theta\sin\Psi\cos\phi$ $a_{13}=\sin\Psi\sin\theta$

$a_{21}=\sin\Psi\cos\phi+\cos\theta\cos\Psi\sin\phi$ $a_{22}=-\sin\Psi\sin\phi+\cos\theta\cos\Psi\cos\phi$ $a_{23}=-\sin\theta\cos\Psi$

$a_{31}=\sin\theta\sin\phi$ $a_{32}=\sin\theta\cos\phi$ $a_{33}=\cos\theta$

$$\frac{\partial U_s}{\partial x_1} = \frac{\partial U_s}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial x_1} + \frac{\partial U_s}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial U_s}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x_1} + \frac{\partial U_s}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial x_1} = -fm_0\left[\underbrace{\frac{mx_1}{R^3}}_{\text{homogènes en } \frac{1}{R^2}} + \underbrace{\frac{3x_1}{2R^5}(A+B+C-3I_{G_0}G)}_{\frac{1}{R^4}} + \underbrace{\frac{3}{R^4}(A\alpha\, a_{11}+B\beta a_{12}+C\gamma a_{13})\left(-\frac{x_1^2}{R^2}\right)}_{\frac{1}{R^4}}\right]$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial \phi} = \frac{\partial U_s}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \phi} + \frac{\partial U_s}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \phi}$$

$$= -\frac{3fm_0}{R^3}(A\alpha\beta - B\beta\alpha)$$

$$= \underbrace{-\frac{3fm_0}{R^3}(A-B)\,\alpha\beta}_{\text{homogène en } \frac{1}{R^3}}$$

En se limitant aux termes du troisième ordre en $\frac{1}{R}$,

$$\frac{\partial U_s}{\partial x_1} = - fmm_0 \frac{x_1}{R^3}$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial \varphi} = - 3f\, m_0 \,(\, A - B \,) \frac{\alpha\beta}{R^3}$$

On obtiendrait, de même, en se limitant aux troisième ordre :

$$\frac{\partial U_s}{\partial y_1} = - fmm_0 \frac{y_1}{R^3}$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial z_1} = - fmm_0 \frac{z_1}{R^3}$$

et pour les seconds membres des 1e et 2e équation du groupe (II.1.3) respectivement :

$$- 3 \frac{f\, m_0}{R^3} \,(\, B - C \,)\, \beta\gamma$$

$$- 3 \frac{f\, m_0}{R^3} \,(\, C - A \,)\, \gamma\alpha$$

Si l'on considère donc la terre comme sphérique et homogène, on peut dissocier le système d'équations (II.1.1) et (II.1.3)même pour des satellites non sphériques à condition de se limiter dans le développement des seconds membres de ces équations aux termes en $\frac{1}{R^3}$.

Nous obtenons alors le système suivant :

$$(II.1.7) \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 = - f\,(m_0 + m)\, \dfrac{x_1}{R^3} \\ \ddot{y}_1 = - f\,(m_0 + m)\, \dfrac{y_1}{R^3} \\ \ddot{z}_1 = - f\,(m_0 + m)\, \dfrac{z_1}{R^3} \end{cases}$$

Ces équations déterminent une orbite Képlérienne du centre des masses.

$$
(II.1.8)\quad
\begin{cases}
A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)\,qr = -3f\dfrac{m_0}{R^3}(B-C)\,\beta\gamma \\
B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)\,pr = -3f\dfrac{m_0}{R^3}(C-A)\,\gamma\alpha \\
C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)\,pq = -3f\dfrac{m_0}{R^3}(A-B)\,\alpha\beta
\end{cases}
$$

avec p, q, r définis selon (I.2.3bis)

Remarque 1 - Pour écrire ces équations, nous avons négligé dans U_s des termes d'ordre égal ou supérieur à :

$$\frac{I}{R^3} \times \frac{l}{R}$$

(on suppose que I est le plus grand des moments principaux d'inertie et l est la plus grande dimension du corps). Ce terme est donc $\frac{l}{R}$ fois plus petit que le précédent.

$\frac{l}{R}$ pour un satellite actuel est de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-6}. L'approximation est donc excellente.

Si l'on considère un satellite naturel comme la lune, $\frac{l}{R} \simeq 45\ 10^{-4}$. Ce développement ne serait pas suffisant.

Remarque 2 - Les termes négligés dans les seconds membres des équations (II.1.8 sont $\frac{l}{R}$ fois plus petits que le terme principal, soit 10^{-5} fois plu petits au moins.

Remarque 3 - Les seconds membres des trois premières équations de (II.1.8) représentent le moment par rapport à G des forces F dues au gradient de gravité et, nous pouvons les écrire sous une forme plus intéressante pour la suite de cette étude.

En effet, en considérant l'ensemble $m_0 + m$, on peut écrire, si G' est le point d'application de la résultante F des forces

d'attraction dues à la terre sur le satellite

$$G\vec{G}'\Lambda\ \vec{F} + G\vec{G}_0\Lambda\ -\vec{F} = 0$$

et

$$\vec{M}^{t}_{G}\ (\vec{F}) = G\vec{G}_0\Lambda\ \overrightarrow{\text{grad}\ U_s}$$

comme

$$\begin{cases} x = R\alpha \\ y = R\beta \\ x = R\gamma \end{cases}$$

et

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}\ U_s} = \left(\frac{\partial U_s}{\partial \alpha}\ \frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)\vec{I} + \left(\frac{\partial U_s}{\partial \beta}\ \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\vec{J} + \left(\frac{\partial U_s}{\partial \gamma}\ \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)\vec{k}$$

On peut écrire :

$$\vec{M}^{t}_{G}\ (\vec{F}) = \begin{pmatrix} -R\alpha \\ -R\beta \\ -R\gamma \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{R}\frac{\partial U_s}{\partial \alpha} \\ \frac{1}{R}\frac{\partial U_s}{\partial \beta} \\ \frac{1}{R}\frac{\partial U_s}{\partial \gamma} \end{pmatrix}$$

soit :

$$\vec{M}^{t}_{G}\ (\vec{F}) = \begin{pmatrix} \gamma\frac{\partial U_s}{\partial \beta} - \beta\frac{\partial U_s}{\partial \gamma} \\ \alpha\frac{\partial U_s}{\partial \gamma} - \gamma\frac{\partial U_s}{\partial \alpha} \\ \beta\frac{\partial U_s}{\partial \alpha} - \alpha\frac{\partial U_s}{\partial \beta} \end{pmatrix} \quad (II.1.9)$$

II.2 Cas du corps de révolution

Si le corps M est de révolution autour de son axe Gz, les équations du mouvement autour du centre d'inertie (II -1.3) s'écrivent plus simplement.

En effet, la fonction de force ne dépend plus de l'angle φ et comme $\frac{\partial U_s}{\partial \varphi} = 0$; la dernière équation s'écrit :

$$r = r^\circ$$

En reportant ce résultat dans les deux premières équations de (II -1.3), nous obtenons :

$$\begin{cases} \left[A \left(\frac{dp}{dt} - qr^\circ \right) + Cqr^\circ \right] \sin\theta = \sin\varphi \, \frac{\partial U_s}{\partial \Psi} + \cos\varphi \, \sin\theta \, \frac{\partial U_s}{\partial \theta} \\ \left[A \left(\frac{dq}{dt} + pr^\circ \right) - Cpr^\circ \right] \sin\theta = \cos\varphi \, \frac{\partial U_s}{\partial \Psi} - \sin\varphi \, \sin\theta \, \frac{\partial U_s}{\partial \theta} \end{cases}$$

Revenons aux angles d'Euler et ces équations s'écrivent :

$$(II.2.1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(A\dot{\Psi} \sin^2\theta + Cr^\circ \cos\theta \right) = \frac{\partial U_s}{\partial \Psi} \\ A \left(\ddot{\theta} - \dot{\Psi}^2 \sin\theta \cos\theta \right) + Cr^\circ \dot{\Psi} \sin\epsilon = \frac{\partial U_s}{\partial \theta} \end{cases}$$

Dans le cas d'un corps de révolution, $\frac{\partial U_s}{\partial \Psi}$ est donc la projection du moment des forces gravitationnelles par rapport à G sur z_1. En effet,

$$A\dot{\Psi} \sin^2\theta + Cr^\circ \cos\theta$$

est la projection sur z_1 du moment cinétique du corps relativement à G.

La troisième équation du groupe (II - 1-4) s'écrit en particulier :

$$(II.2.2.) \quad \frac{m_0 m}{m_0 + m} \left(\dot{x}_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1 \right) + A\dot{\Psi} \sin^2\theta + Cr^\circ \cos\theta = C_3$$

III - CAS d'un CORPS de REVOLUTION SOUMIS à un CORPS CENTRAL SPHERIQUE et HOMOGENE MOUVEMENTS PLANS du CENTRE des MASSES

III.1 - Equations générales

Le Professeur DUBOSHIN (Référence ⋆ ⋆ paragraphe I.1.) a développé cette étude dans le cas d'un segment matériel homogène. En suivant son raisonnement, nous l'étendons ici au cas un peu plus général du corps de révolution ($C \neq 0$).

Supposons que le satellite soit un ellipsoïde homogène de révolution. La fonction de force correspondant à la mutuelle attraction d'un ellipsoïde de révolution homogène M, aplati selon l'axe des z et d'une sphère homogène M_0, s'écrit : (⋆)

$$(\text{III.1.1.}) \qquad U_s = \frac{f m_0 m}{R}\left[1 + \frac{1}{10}\lambda^2(1 - 3\gamma^2)\frac{a^2}{R^2} + \ldots\right]$$

$$\lambda^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

a et c sont les rayons équatoriaux et polaires du corps M.

γ est le cosinus directeur de G_0G avec l'axe de révolution z

$$(\text{III.1. bis}) \qquad U_s = U_s\ (R, \gamma^2)$$

Les équations régissant le mouvement sont alors les suivantes :

$$(\text{III.1.2.}) \qquad \begin{cases} \ddot{x}_1 = \dfrac{m_0+m}{m_0 m}\dfrac{\partial U_s}{\partial x_1} \\ \ddot{y}_1 = \dfrac{m_0+m}{m_0 m}\dfrac{\partial U_s}{\partial y_1} \\ \ddot{z}_1 = \dfrac{m_0+m}{m_0 m}\dfrac{\partial U_s}{\partial z_1} \end{cases}$$

$$(\text{III.1.3}) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(A\dot{\Psi}\sin^2\Theta + Cr\cos\Theta\right) = \dfrac{\partial U_s}{\partial \Psi} \\ A\left(\ddot{\Theta} - \dot{\Psi}^2\sin\Theta\cos\Theta\right) + Cr\dot{\Psi}\sin\Theta = \dfrac{\partial U_s}{\partial \Theta} \\ \dot{\Psi}\cos\Theta + \dot{\Psi} = r = r^\circ \end{cases}$$

⋆ TISSERAND F. Traité de Mécanique Céleste - Tome 2. Nouveau tirage 1960 chap. V p. 68

Ce système possède les 4 intégrales premières :

$$(III.1.4)\quad \begin{cases} \dfrac{m_0 m}{m_0+m}\,(y_1\dot{z}_1 - z_1\dot{y}_1) - A(\dot{\Psi}\sin\Theta\cos\Theta\sin\Psi - \dot{\Theta}\cos\Psi) + Cr\sin\Theta\sin\Psi = C_1 \\ \dfrac{m_0 m}{m_0+m}\,(z_1\dot{x}_1 - z_1\dot{z}_1) + A(\dot{\Psi}\sin\Theta\cos\Theta\cos\Psi + \dot{\Theta}\sin\Psi) - Cr\sin\Theta\cos\Psi = C_2 \\ \dfrac{m_0 m}{m_0+m}\,(x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1) + A\dot{\Psi}\sin^2\Theta + Cr\cos\Theta = C_3 \\ \dfrac{m_0 m}{m_0+m}\,(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + A\,(\dot{\Psi}^2\sin^2\Theta + \dot{\Theta}^2) = 2\,U_s + h - Cr^2 \end{cases}$$

Evaluons les dérivées partielles de Us relativement aux paramètres x1, y1, z1, Ψ, Θ et formulons en conséquence les équations (III.1.2) et (III.1.3)

$$\frac{\partial U_s}{\partial x_1} = \frac{\partial U_s}{\partial R}\,\frac{\partial R}{\partial x_1} + \frac{\partial U_s}{\partial \gamma}\,\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}$$

D'après les relations de définitions de α, β, γ

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} = \frac{1}{R}\left(a_{13} - \gamma\,\frac{x_1}{R}\right)$$

De même, et en tenant compte de la définition des a_{ij}

$$\frac{\partial U_s}{\partial \Psi} = \frac{\partial U_s}{\partial \gamma}\,\frac{\partial \gamma}{\partial \Psi} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \Psi} = \frac{\sin\Theta}{R}\,(x_1\cos\Psi + y_1\sin\Psi)$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial \Theta} = \frac{\partial U_s}{\partial \gamma}\,\frac{\partial \gamma}{\partial \Theta} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \Theta} = \frac{1}{R}\left[\cos\Theta\,(x_1\sin\Psi - y_1\cos\Psi) - z_1\sin\Theta\right.$$

Les équations III.1.2 et III.1.3 s'écrivent donc :

$$(III.1.5)\quad \begin{cases} \ddot{x}_1 = \dfrac{m_0+m}{m_0 m}\left[\dfrac{x_1}{R}\,\dfrac{\partial U_s}{\partial R} + \dfrac{1}{R}\left(a_{13} - \gamma\,\dfrac{x_1}{R}\right)\dfrac{\partial U_s}{\partial \gamma}\right] \\ \ddot{y}_1 = \dfrac{m_0+m}{m_0 m}\left[\dfrac{y_1}{R}\,\dfrac{\partial U_s}{\partial R} + \dfrac{1}{R}\left(a_{23} - \gamma\,\dfrac{y_1}{R}\right)\dfrac{\partial U_s}{\partial \gamma}\right] \\ \ddot{z}_1 = \dfrac{m_0+m}{m_0 m}\left[\dfrac{z_1}{R}\,\dfrac{\partial U_s}{\partial R} + \dfrac{1}{R}\left(a_{33} - \gamma\,\dfrac{z_1}{R}\right)\dfrac{\partial U_s}{\partial \gamma}\right] \end{cases}$$

$$(III.1.6)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\,(A\dot{\Psi}\sin^2\Theta + Cr\cos\Theta) = \dfrac{\sin\Theta}{R}\,(x_1\cos\Psi + y_1\sin\Psi)\,\dfrac{\partial U_s}{\partial \gamma} \\ A\,(\ddot{\Theta} - \dot{\Psi}^2\sin\Theta\cos\Theta) + Cr\dot{\Psi}\sin\Theta = \dfrac{1}{R}\left[\cos\Theta\,(x_1\sin\Psi - y_1\cos\Psi) - z_1\sin\Theta\right.\dfrac{\partial}{\partial} \\ r = r^\circ \end{cases}$$

II - 2 Mouvements plans du centre des masses de M

Nous allons tenter de préciser les conditions d'orientation du corps M pour qu'il existe des trajectoires planes du centre des masses G d'un corps de révolution.

C'est l'observation des trajectoires des satellites et des planètes qui nous incite à rechercher de telles solutions.

Une condition nécessaire pour que le mouvement du centre des masses de G reste dans le plan $x_1\ y_1$ (le fait que l'on choisisse ce plan ne fait pas perdre de généralité à notre développement), est que les forces d'attraction aient une résultante et un moment résultant par rapport à G_0, nuls sur z_1 (force centrale).

Ceci se traduit donc d'après la remarque du paragraphe II.2, par les relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial U_s}{\partial z_1} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial U_s}{\partial \Psi} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{avec } z_1 = 0 \qquad \text{(III. 2.1.)}$$

Les équations du mouvement du centre des masses sont alors les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x}_1 = \dfrac{m_0 + m}{m_0 m}\left[\dfrac{x_1}{R}\dfrac{\partial U}{\partial R} + \dfrac{1}{R}\left(a_{13} - \gamma\dfrac{x_1}{R}\right)\dfrac{\partial U_s}{\partial \gamma}\right] \\ \\ \ddot{y} = \dfrac{m_0 + m}{m_0 m}\left[\dfrac{y_1}{R}\dfrac{\partial U}{\partial R} + \dfrac{1}{R}\left(a_{23} - \gamma\dfrac{y_1}{R}\right)\dfrac{\partial U_s}{\partial \gamma}\right] \end{array}\right. \qquad \text{(III. 2.2.)}$$

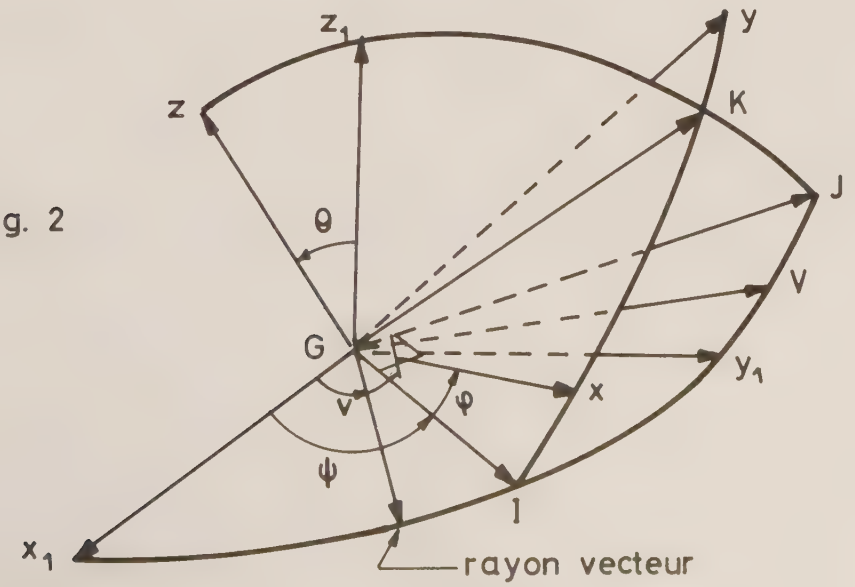
Si v est l'angle que fait le rayon vecteur $\overrightarrow{G_0G}$ avec $\overrightarrow{G_0x_1}$,

$$\gamma = \sin\Theta \sin(\Psi - v)$$

D'autre part,

$$x_1 \cos\Psi + y_1 \sin\Psi = R\cos(\Psi - v) \quad \text{(voir figure ci-dessous)}$$

Fig. 2



Des équations (III.2.1) (III.1.5) et (III.1.6) on peut tirer :

$$\begin{cases} \dfrac{a_{33}}{R}\ \dfrac{\partial U_s}{\partial \gamma} = 0 \\ \dfrac{\sin\Theta}{R}\ (x_1 \cos\Psi + y_1 \sin\Psi)\ \dfrac{\partial U_s}{\partial \gamma} = 0 \end{cases}$$

soit

$$\text{(III. 2.3.)} \quad \begin{cases} \dfrac{\cos\Theta}{R}\ \dfrac{\partial U_s}{\partial \gamma} = 0 \\ \sin\Theta \cos(\Psi - v)\ \dfrac{\partial U_s}{\partial \gamma} = 0 \end{cases}$$

Deux cas peuvent se présenter pour qu'il en soit ainsi :

$$\text{(III. 2.4.)} \quad \text{(a)} \quad \frac{\partial U_s}{\partial \gamma} = 0$$

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} \cos\Theta = 0 \\ \sin\Theta \cos(\Psi - v) = 0 \end{cases}$$

III - 3 L'axe de révolution est dans un plan perpendiculaire au rayon vecteur sans être perpendiculaire au plan de l'orbite, elle même étant de forme quelconque.

En effet, d'après (III.1.1bis) $\dfrac{\partial U_s}{\partial \gamma} = 2\gamma \dfrac{\partial U_s}{\partial \gamma 2}$

Mais $\dfrac{\partial U_s}{\partial \gamma 2}$ n'est jamais nul. La condition (a) sera réalisée si $\gamma = 0$

L'axe de révolution doit alors se trouver dans un plan perpendiculaire à $\overrightarrow{G_0G}$. Nous considérerons à part le cas où G_z est colinéaire à G_{z1} ($\sin\Theta = 0$)

Les systèmes (III.2.2.) et (III.1.6.) régissant le mouvement peuvent alors se scinder en deux systèmes complètement indépendants :

$$\text{(III.3.1)} \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 = \dfrac{m_0 + m}{m_0 m}\ \dfrac{x_1}{R}\ \dfrac{\partial U_s}{\partial R} \\ \ddot{y}_1 = \dfrac{m_0 + m}{m_0 m}\ \dfrac{y_1}{R}\ \dfrac{\partial U_s}{\partial R} \end{cases}$$

$$\text{avec } U_s = \frac{f m_0 m}{R}\left[1 + \frac{\lambda^2}{10}\ \frac{a^2}{R^2} + \ldots\right]$$

$$\text{(III.3.2.)} \quad \begin{cases} A\,\dot{\Psi}\sin^2\Theta + Cr\cos\Theta = K \\ A\,(\ddot{\Theta} - \dot{\Psi}^2 \sin\Theta\cos\Theta) + Cr\,\dot{\Psi}\sin\Theta = 0 \\ r = r^\circ \end{cases}$$

Les équations (III - 3-2) font état du mouvement du corps M relativement à G et décrivent le cas classique de l'évolution "à la Poinsot" d'un solide de révolution.

En effet, la deuxième équation de(III - 3-2)peut être remplacée par l'intégrale des forces vives pour le corps M seul.

Appelons $w(R) = U_s$ (R,cte) défini par (III - 1-1 bis).

En multipliant par $\dot{x}_1$ et $\dot{y}_1$ les équations de (III - 3-1) et en intégrant, on obtient :

$$\frac{m_0 m}{m_0+m} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = 2\,w + h_1$$

D'après la dernière équation de (III - 1-4), ceci entraîne que :

$$\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 = k$$

Nous sommes bien en présence d'un problème de Poinsot et puisque le corps est de révolution

$$\theta = \theta_o \qquad \dot{\psi} = \dot{\psi}_o \qquad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_o$$

Le corps M a un mouvement de précession régulière autour de l'axe $\vec{Gz}_1$, les valeurs de θ, $\dot{\psi}$ et $\dot{\varphi}$ dépendant des conditions initiales.

Le système (III - 3-1) représente un mouvement non képlérien de G, mais qui est peu différent si a est très petit devant R.

Les équations (III -3-1) peuvent s'écrire :

$$\text{(III - 3-3)} \quad \begin{cases} \dfrac{m_0 m}{m_0+m} \ddot{x}_1 = \dfrac{x_1}{R} \dfrac{dw}{dR} \\ \dfrac{m_0 m}{m_0+m} \ddot{y}_1 = \dfrac{y_1}{R} \dfrac{dw}{dR} \end{cases}$$

$\frac{dw}{dR}$ représente la force attractive dirigée vers G_0

$$\frac{dw}{dR} = -\frac{f m_0 m}{R^2} \left[1 + \frac{3\lambda^2 a^2}{10 R^2} + \cdots \right]$$

Ce terme complémentaire est d'autant plus petit que $\lambda \ll 1$ et $R \gg 1$

III - 4 L'orbite est circulaire, l'axe de révolution est colinéaire au rayon vecteur.

Ceci résulte du 2e cas

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta \cos(\Psi - v) = 0 \end{cases}$$

En effet, $\sin\theta = \pm 1$ et $\theta = \frac{\pi}{2} + k'\pi$

$$\cos(\Psi - v) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\Psi} = \dot{v} \qquad \Psi = v + (2k' + 1)\frac{\pi}{2}$$

D'après la première équation de (III - 3-2), puisque θ est constant, $\dot{\Psi}$ est constant, donc $\dot{v}$ est constant et l'orbite de G, centre des masses de M, est un cercle ou une droite passant par G_0 dans le plan $x_1 y_1$.

L'axe de révolution est alors dans le plan de l'orbite, colinéaire à $\vec{G_0G}$ et le plan équatorial du corps reste perpendiculaire au rayon vecteur.

Cette condition est réalisée si $\gamma = \pm 1$

$$U_s = \frac{fm_0 m}{R}\left[1 - \frac{1}{5}\lambda 2 \frac{a^2}{R^2}\right]$$

Le système peut donc se dissocier intégralement et les équations (III - 3-3) restent les mêmes avec :

$$\frac{dw}{dR} = -\frac{fm_0 m}{R^2}\left[1 - \frac{3}{5}\lambda^2 \frac{a^2}{R^2}\right]$$

Le terme perturbateur est dans ce cas deux fois plus grand que précédemment, mais de signe contraire.

Le corps parcourt donc une orbite circulaire non Képlérienne.

Remarque : - Il est à noter que cette dernière configuration n'est pas la seule pour une orbite circulaire. En effet, il peut exister des orbites circulaires planes non Képlériennes (paragraphe III - 3) pour lesquelles l'axe de révolution se trouve dans un plan perpendiculaire au rayon vecteur.

Nous allons préciser ce cas.

IV - CAS d'un CORPS de REVOLUTION SOUMIS à un CORPS CENTRAL SPHERIQUE HOMOGENE MOUVEMENTS CIRCULAIRES PLANS du CENTRE des MASSES

IV -1 Conditions d'existence

Parmi toutes les solutions particulières où le centre des masses décrit un mouvement plan non newtonien, considérons celles où la trajectoire est un cercle et où l'axe de révolution z reste constamment perpendiculaire au rayon vecteur (cas particulier du § III.3). Nous pourrons toujours supposer que ce plan soit $x_1 G_0 y_1$.

On sait, d'après le paragraphe III.3, que dans ce cas :

$$\gamma = \sin \Theta_0 \sin (\psi - v) = 0$$

Il y a alors deux éventualités :

$$(IV.1.1) \quad \begin{cases} (a) & \sin (\psi - v) = 0 \qquad \Theta_0 \neq 0 \text{ ou } \pi \\ (b) & \sin \Theta = 0 \end{cases}$$

IV -2 Le mouvement de G est circulaire uniforme. L'axe de révolution est dans un plan perpendiculaire au rayon vecteur sans être perpendiculaire au plan de l'orbite.

En effet, d'après les résultats du paragraphe III.3,

$$\Theta = \Theta_0 \qquad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 \qquad \dot{\phi} = \dot{\phi}_0$$

$$\sin (\psi - v) = 0 \text{ entraîne } \psi = v \quad \text{ou} \quad \psi = v + \pi$$

Si R_0 est le rayon de l'orbite, on a :

$$\begin{cases} x_1 = R_0 \cos v \\ y_1 = R_0 \sin v \end{cases}$$

On sait que le corps M tourne autour de Gz_1 avec une vitesse de précession constante et égale à la vitesse angulaire sur l'orbite. Cette vitesse angulaire est définie, d'après III.3.3, par l'équation :

$$\frac{m_0 + m}{m_0 m} \left(\frac{dw}{dR}\right)_R = R_0 + R_0 \dot{v}^2 = 0$$

soit $$\dot{v}^2 = -\frac{1}{R_0}\frac{m_0 + m}{m_0\, m}\left(\frac{dw}{dR}\right)_{R = R_0} = \frac{f(m_0 + m)}{R_0^3}\left(1 + \frac{3\lambda^2 a^2}{10\, R_0^2}\right)$$

$\dot{\psi}$ doit obéir à $\dot{\psi}\cos\Theta_0 = \frac{C}{A}\, r^\circ$

En effet, la projection K du moment cinétique sur z_1 est constante et,

$$\begin{cases} Cr^\circ = K\cos\Theta_0 \\ A\,\dot{\psi}\sin\Theta_0 = K\sin\Theta_0 \end{cases}$$

En conclusion, $\dot{v}\cos\Theta_0 = \frac{C}{A}\, r^\circ$, en supposant donc $\Theta_0 \neq 0$ ou π, $\gamma = 0$

En particulier, si r° et C sont différents de zéro, Θ_0 ne peut jamais valoir $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire, que Gz ne peut pas être colinéaire au vecteur vitesse. Si $\frac{C}{A}\, r^\circ = 0$, on peut avoir $\Theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Quel que soit $\Theta_0 = 0$ ou π, l'orbite est circulaire non képlérienne.

IV.3 L'axe de révolution est perpendiculaire au plan de l'orbite

$$\sin\Theta_0 = 0 \qquad \Theta_0 = 0 \text{ ou } \pi$$

Gz et Gz_1 sont alors confondus et ψ est indéterminé.

La solution est ainsi définie :

$$\begin{cases} \Theta_0 = 0 \text{ ou } \pi \qquad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 \qquad \dot{\phi} = \dot{\phi}_0 \\ x_1 = R_0\cos v \\ y_1 = R_0\sin v \end{cases}$$

$\dot{v}$ serait exprimé de la même façon que précédemment. Le centre d'inertie G de M se meut sur une orbite circulaire non képlérienne et l'axe de révolution du corps reste perpendiculaire au plan de l'orbite. Ce dernier tourne sur lui-même à la vitesse $r_0 = \dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_0$.

IV.4 Conclusions

Nous pouvons remarquer que les résultats obtenus dans ce quatrième chapitre, et la fin du chapitre précédent, montrent qu'un mouvement circulaire du centre des masses n'est possible que si :

$$\gamma = 0 \qquad \text{ou} \qquad \gamma = \pm 1$$

Ceci correspond en fait aux extrêmas de la fonction de force lorsque

$$-1 \leqslant \gamma \leqslant 1$$

En supposant les résultats pour un segment matériel (*), encore valables pour un corps de révolution, le Professeur DUBOSHIN de l'Université de Moscou a étudié sur une trajectoire circulaire la stabilité d'attitude de différentes positions par une méthode de Poincaré.

En confirmation de la théorie précédente (paragraphes IV.2 et IV.3) il obtient en première approximation les résultats suivants (**) :

Solutions régulières :

- "flèche" ($\gamma = 0$, $\theta = \theta_0$) ou "Arrow" est stable si $C > A$ et instable si $C < A$.
- "flotte" ($\gamma = 0$, $\theta = 0$ ou π) ou "Float" est stable si $C = 2A$ et instable si $C = 0$. Cette position est conditionnellement stable si $0 < C < 2A$.
- "rayon" ($\gamma = \pm 1$, $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$) ou "Spoke" est stable si $C < A$, et peut être stable ou instable si $C > A$ en première approximation.

Si nous considérons d'autre part les vitesses angulaires puis circulaires dans les deux cas $\gamma = 0$ et $\gamma = \pm 1$, il apparait un résultat intéressant.

Si $\gamma = 0$, nous avons trouvé au paragraphe IV.2 :

$$\dot{v}_0^2 = -\frac{1}{R_0}\frac{m_0 + m}{m_0 m}\left(-\frac{f m_0 m}{R_0^2}\left(1 + \frac{3}{10}\frac{\lambda^2 a^2}{R_0^2}\right)\right)$$

Si $\gamma = \pm 1$, nous avons trouvé au paragraphe III.4 :

$$\dot{v}_1^2 = -\frac{1}{R_0}\frac{m_0 + m}{m_0 m}\left(-\frac{f m_0 m}{R_0^2}\left(1 - \frac{3}{5}\frac{\lambda^2 a^2}{R_0^2}\right)\right)$$

Or, la vitesse angulaire pour une orbite képlérienne circulaire est définie par :

$$\dot{v}_c^2 = -\frac{1}{R_0}\frac{m_0 + m}{m_0 m}\left(-\frac{f m_0 m}{R_0^2}\right)$$

soit

$$\dot{v}_c^2 = f\frac{m_0 + m}{R_0^3} = \frac{1}{R_0^2} V_c^2$$

$$\dot{v}_0^2 = f\frac{m_0 + m}{R_0^3}\left(1 + \frac{3}{10}\frac{\lambda^2 a^2}{R_0^2}\right) = \frac{1}{R_0^2} V_0^2$$

$$\dot{v}_1^2 = f\frac{m_0 + m}{R_0^3}\left(1 + \frac{3}{5}\frac{\lambda^2 a^2}{R_0^2}\right) = \frac{1}{R_0^2} V_1^2$$

---

* G.N.DUBOSHIN "On the stability of regular motions of artificial celestial bodies". Astron. Zhurnal Vol.36, N°4, 1959 (Soviet Astronomy), Tome 3, N°4, pp.702-712.

** G.N.DUBOSHIN "Rotational Motion of artificial bodies in Space". ARS. Journal Supplement. Tome 31, 1961, pp.1345-1350.

V_0, V_1 et V_c sont les vitesses circulaires correspondant à chacun des cas précédents.

Alors :

$$\left(\frac{V_0}{V_c}\right)^2 = 1 + \frac{3}{10}\frac{\lambda^2 a^2}{R_0^2}$$

$$\left(\frac{V_1}{V_c}\right)^2 = 1 - \frac{3}{5}\frac{\lambda^2 a^2}{R_0^2}$$

Si $\gamma = 0$, la vitesse circulaire sur orbite non képlérienne peut être beaucoup plus grande, selon la dimension du corps, que la vitesse sur orbite circulaire képlérienne.

Si $\gamma = \pm 1$, cette vitesse est toujours inférieure à la vitesse sur orbite de Képler.

IV -5 Remarque

V.V. BELETSKII (*) a montré que certains résultats précédents étaient encore valables si un satellite de forme quelconque parcourt une orbite circulaire plane avec une attitude telle que ses axes principaux d'inertie soient orientés selon le rayon vecteur, la tangente à l'orbite et la normale au plan de l'orbite. Une telle solution vérifie en effet les équations générales du mouvement.

En particulier il a également :

$$\dot{v}^2 = -\frac{1}{R_0}\frac{m_0 + m}{m_0\, m}\left(\frac{\partial U_s}{\partial R}\right)_0$$

L'indice zéro indique que cette quantité est prise en fonction de l'orientation initiale du corps.

---

* BELETSKII V.V. "Some aspects of translational-rotational motion of a ridid body in a newtonian field of force". Traduit de Isskusstvennye Sputniki Zemli, dans Artificial Earth Satellites. Tome 16, 1963, pp.68-95.

V - QUELQUES EVALUATIONS de l'INFLUENCE du MOUVEMENT de ROTATION sur le MOUVEMENT de TRANSLATION

V - I Introduction

Le problème de l'évaluation de l'importance de ce couplage peut se faire de deux façons différentes.

Nous pouvons pour des conditions d'orientation déterminées, soit examiner l'influence de l'amplitude des mouvements, soit étudier la répercussion de la forme du corps. Ces deux points de vue sont examinés successivement.

V - 2 Le corps M a trois moments principaux d'inertie différents et se déplace sur orbite circulaire plane.

Son attitude est telle que ses axes principaux d'inertie sont colinéaires, au rayon vecteur, à la tangente à l'orbite, à la normale au plan de l'orbite. L'orbite est circulaire. BELETSKII (référence précédente) montre alors au moyen du critère de Lyapunov que cette orientation est stable si z, l'axe de moindre moment d'inertie est dirigé selon le rayon vecteur et y l'axe de plus grand moment d'inertie selon la normale au plan de l'orbite. Les oscillations dans le plan de l'orbite (θ) resteront petites également si les perturbations initiales sont telles que :

$$|\dot{\theta}_o| \leqslant \dot{v}\sqrt{3} \qquad \text{(cf. II - 2-7) 2° partie p.57}$$

Elles sont donc du même ordre de grandeur que la vitesse angulaire sur l'orbite.

La fonction de Lyapunov introduite par l'auteur permet alors d'évaluer l'influence de ces oscillations sur R.

$$(V - 2\text{-}1) \qquad \dot{R}^2 < 3\dot{v}^2 (A - C)$$

Une variation de rayon vecteur introduit donc une variation d'excentricité.
Si $R = \dfrac{P}{1 + e\cos v}$

$$\dot{R} = \frac{R^2}{P} e \sin v \dot{v} \simeq R_0 \dot{v} e \sin v$$

$$e^2 \sin^2 v < \frac{3 (A - C)}{R_0^2}$$

soit $$e^2 < \frac{3 (A - C)}{R_0^2}$$

A et C peuvent être assez différents l'un de l'autre.

La différence A - C est alors inférieure au carré de la plus grande dimension du corps.

(V - 2-2) $$e < \sqrt{3} \frac{l}{R}$$

Dans le cas d'un satellite orbitant à 630 km. d'altitude, ($R_0 = 7\ 10^6$m) et ayant une dimension de 7 m, la perturbation sur l'excentricité est de l'ordre de 10^{-6}.

V - 3 Le corps M est de révolution et se déplace sur une orbite quelconque.

a) BELETSKII considère ensuite ce même cas avec des orientations similaires du corps, mais pour des oscillations plus grandes en θ . Il particularise ensuite le problème.

En reprenant les équations (II - 1-9), ce mouvement sera possible si $\frac{\partial U}{\partial \beta} = 0$, $\beta = 0$.

Si θ est l'angle entre le rayon vecteur et l'axe z du corps, la seule équation restante s'écrit :

$$B \frac{dq}{dt} = \alpha \frac{\partial U_s}{\partial \gamma} - \gamma \frac{\partial U_s}{\partial \alpha}$$

avec $\alpha = - \sin \theta$ $\gamma = \cos \theta$

et $$U_s = f m_0 \left[\frac{m}{R} + \frac{3}{2R^3} \left(\frac{A+B+C}{3} - A \sin^2 \theta - C \cos^2 \theta \right) \right] = U (R, \theta)$$

or $$\frac{\partial U_s}{\partial \theta} = \frac{\partial U_s}{\partial (\cos \theta)} (- \sin \theta) + \frac{\partial U_s}{\partial (-\sin \theta)} (- \cos) = \frac{\partial U_s}{\partial \gamma} \alpha - \frac{\partial U_s}{\partial \alpha} \gamma$$

$$B \frac{dq}{dt} = \alpha \frac{\partial U_s}{\partial \gamma} - \gamma \frac{\partial U_s}{\partial \alpha}$$

$$B \frac{dq}{dt} (\dot{v} + \dot{\theta}) - \frac{\partial U_s}{\partial \theta} = 0$$

En y ajoutant les deux intégrales 1° (2 dernières équations de II - 1-4) :

$$(V - 3\text{-}1) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{m_o m}{m_o + m} (\dot{R}^2 + R^2 \dot{v}^2) + \frac{1}{2} B (\dot{\theta} + \dot{v})^2 = U_s (R, \theta) + h_1 \\ \\ \frac{m_o m}{m_o + m} R^2 \dot{v} + B (\dot{\theta} + \dot{v}) = h_2 \end{cases}$$

nous obtenons un système complet définissant R, θ, v, que nous pouvons intégrer en supposant le corps de révolution autour de y (A = C)

$$(V - 3\text{-}2) \quad \begin{cases} \dot{\theta} + \dot{v} = h_3 \\ \\ \frac{1}{2} \frac{m_o m}{m_o + m} (\dot{R}^2 + R^2 \dot{v}^2) = U'_s (R) + h'_1 \\ \\ R^2 \dot{v} = h'_2 \end{cases}$$

Dans ce cas, l'orbite ne dépend plus du mouvement du corps par rapport à son centre, mais de la forme seulement du corps par U'_R

$$U'_R = f m_o \left[\frac{m}{R} + \frac{B-A}{2R^3} \right]$$

L'auteur a déjà intégré des équations du même type que(V - 2-4) dans une autre publication (*) où il a exprimé les résultats en fonction des éléments osculateurs. Il montre que la conséquence la plus importante sur le mouvement se traduit par un déplacement séculaire du périgée de l'orbite d'une quantité $\Delta\omega$ par révolution telle que

$$\Delta\omega = 2\pi\varepsilon \frac{R_o^2}{\rho_o^2}$$

---

* BELETSKII V.V. "Orbit of an équatorial earth satellite", traduit de Iskusstvennye Sputniki Zemli dans Artificial Earth Satellites
Tome 13. 1962 pp. 53-60

R_0 est le rayon équatorial de la terre, ε un paramètre qui définit l'aplatissement terrestre. ρ_0 le paramètre de l'orbite. Dans le cas qui nous intéresse

$$\Delta\omega = 3\pi \frac{(B-A)}{\rho_0^2} \frac{m_0+m}{m_0 m} \quad \text{et} \quad B - A \simeq ml^2$$

En considérant un satellite de 1000 kg (double battant de cloche de 500 kg séparés par 21 = 14 m) parcourant une orbite à 630 km d'altitude ($\rho_0 = 7\ 10^6$ m)

$$\Delta\omega = 3\pi\ 10^{-12} \text{ par révolution}$$

soit 2" d'arc en 100 ans.

b) KONDURAR' (*) reprend dans cette publication les équations générales (III - 1-2) et (III - 1-3) obtenues au paragraphe III-1 et tente d'obtenir une solution générale par la méthode de Poincaré. Il écrit ces équations en fonction de ρ, v, z coordonnées cylindriques de M et Ψ et θ angles d'Euler définissant l'axe de révolution, puis recherche une solution sous forme d'un développement en série infinie de chacune de ces variables en fonction du petit paramètre λ^2 représentant l'aplatissement du corps M.

Il restreint son développement au terme du 1° degré en λ^2.

L'auteur donne ensuite deux exemples permettant d'évaluer les perturbations du 1er ordre dues au fait que la forme du corps réagit sur le mouvement de son centre d'inertie.

1) cas d'un satellite artificiel (a = b< c)

rayon polaire du satellite	c = 10 m	
aplatissement	λ^2 = 0.03	
masse	m = 10 tonnes	
orbite circulaire initiale	ρ = 1.1 rayon terrestre ou altitude	630
inclinaison initiale	65°)	longitude v initiale 50°30'
latitude initiale	45°)	

---

* KONDURAR' V.T. "The general case of the translational rotational motion of a spheroïd attracted by a sphere" traduit de Astronomicheskü Zhurnal Vol. 38 n° 2 pp. 310-324 dans Soviet Astronomy A.J. Vol. 5 n° 2. 1961 pp. 232-241

KONDURAR' trouve alors une perturbation du 1er ordre se superposant à la solution correspondant au mouvement d'un corps sphérique sur orbite circulaire :

$$\rho_1 (t) \simeq 10^{-6} \cos \dot{v}0 \, (t-t_0)$$

$$v_1 (t) \simeq - 0{,}26 \; 10^{-12} \sin \dot{v}_0 \, (t-t_0)$$

$$z_1 (t) \simeq 0{,}27 \; 10^{-6} \sin \dot{v}_0 \, (t-t_0)$$

$$\Psi_1 (t) \simeq 1{,}59 \; 10^{-2} \sin \dot{\Psi}_0 \, (t-t_0)$$

$$\theta_1 (t) \simeq 0$$

Pour certaines valeurs de $\frac{\dot{v}_0}{\dot{\Psi}_0}$, ($\frac{1}{2}$, 1 , $\frac{3}{2}$, 2) un phénomène de résonance peut apparaître et les amplitudes peuvent devenir beaucoup plus grandes.

2) Cas de la lune (supposé telle que a = b< c)

rayon polaire	c = 1738 km
aplatissement	$\frac{2}{\lambda}$ = 0.00125

La variation maximum du rayon vecteur est alors de 10 km. Les perturbations du 1er ordre, sur z, θ, Ψ, soit z_1, θ_1 et Ψ_1 sont nulles. La variation séculaire sur v, soit v_1 est de 1"14 par jour.

Remarque - Dans une publication plus récente (*), KONDURAR' reprend ces développements en série de façon plus complète. Avec des valeurs plus précises des coefficients, il montre que la forme de la lune influe sur le rayon de l'orbite d'environ 0,4 km par an et que le mouvement de précession du noeud de l'orbite est annuellement de 0'5.

---

* KONDURAR' V.T. "Influence of the figure of the moon on its motion" traduit de Astronomischeskü Zhurnal. Vol. 40 n° 4 pp. 757-766 dans Soviet Astronomy A.J. Vol. 7 n° 4 1964 pp. 576-582

VI - CONCLUSIONS sur la 1ère PARTIE

Il est couramment admis que le mouvement du centre des masses et autour de celui-ci sont totalement découplés. Cette affirmation est habituellement justifiée par le fait que le rapport de l'énergie représentative du mouvement autour du centre des masses à celle de son propre mouvement est très petit.

Il en est de même du rapport des moments cinétiques.

Les études de l'effet du mouvement d'attitude sur l'orbite avaient été reprises récemment par DUBOSHIN (Réf.(2) et (3)) et il considérait (en 1959) le cas particulier des mouvements orbitaux et d'attitude d'une tige sans épaisseur.

Les études analytiques se sont arrêtées à ce stade et toutes les recherches suivantes ont été pratiquement uniquement numériques ou semi-numériques (développement en séries). KONDURAR',V.T a utilisé la méthode de Poincaré pour évaluer les perturbations de l'orbite dues à la forme du corps qui la parcoure. Seul BELETSKII,V.V. a donné analytiquement dans un cas très simple (mouvement dans le plan de tangage seulement. Réf. p.34) une idée de l'effet des mouvements d'attitude sur le rayon vecteur.

Les chapitres III et IV de la première partie apportent des résultats très intéressants, en ce sens, qu'ils redonnent par une méthode systématique (recherche des orientations telles que les mouvements plans puissent exister) les solutions particulières utilisées comme point de départ par Messieurs DUBOSHIN, BELETSKII et Madame PASCAL.

Il faut admettre malgré tout que les perturbations dues aux variations d'attitude et à la forme du corps restent en général très faibles lorsqu'il n'y a pas résonance.

Les paramètres les plus touchés sont d'une part le rayon vecteur, surtout affecté par les oscillations dans le plan de tangage et d'autre part l'anomalie vraie, c'est-à-dire la position du perigée de l'orbite. Pour l'autre variable : z cote du centre des masses, la variation est pratiquement nulle.

.../...

Nous pouvons même ignorer l'évolution séculaire du périgée. En effet, la perturbation due à la forme du corps est plus petite que la différence apparaissant en utilisant la théorie de la relativité. En général, l'effet relativiste sur le mouvement du périgée est 100 à 1000 fois plus important. Il serait du même ordre de grandeur si les dimensions du corps étaient de 200 à 300 m.

Il faudra donc en tenir compte d'une façon beaucoup plus sérieuse lorsque seront satellisées des stations orbitales de plusieurs centaines de mètres de rayon.

2° PARTIE

-:-

ATTITUDE D'UN SATELLITE DE FORME QUELCONQUE

SOUMIS AU GRADIENT DE GRAVITE

D'UNE TERRE SPHERIQUE HOMOGENE ET

PARCOURANT UNE ORBITE PLANE QUELCONQUE

I - SYSTEMES DE REFERENCE ET EQUATIONS GENERALES

Pour simplifier l'écriture des équations du mouvement, nous choisissons l'origine O_1 du référentiel absolu au centre de la terre et l'un de ses axes O_1z_1 perpendiculaire au plan de l'orbite. Le satellite a donc sa trajectoire dans le plan $x_1O_1y_1$ et il est repéré par son rayon vecteur $\vec{R} = \overrightarrow{O_1S}$ et son anomalie vraie, V, angle que fait $\overrightarrow{O_1S}$ avec $\overrightarrow{O_1x_1}$ (voir fig. 1). Nous supposons, grâce aux résultats de la 1ère partie, que le mouvement d'attitude ne perturbe pas l'orbite.

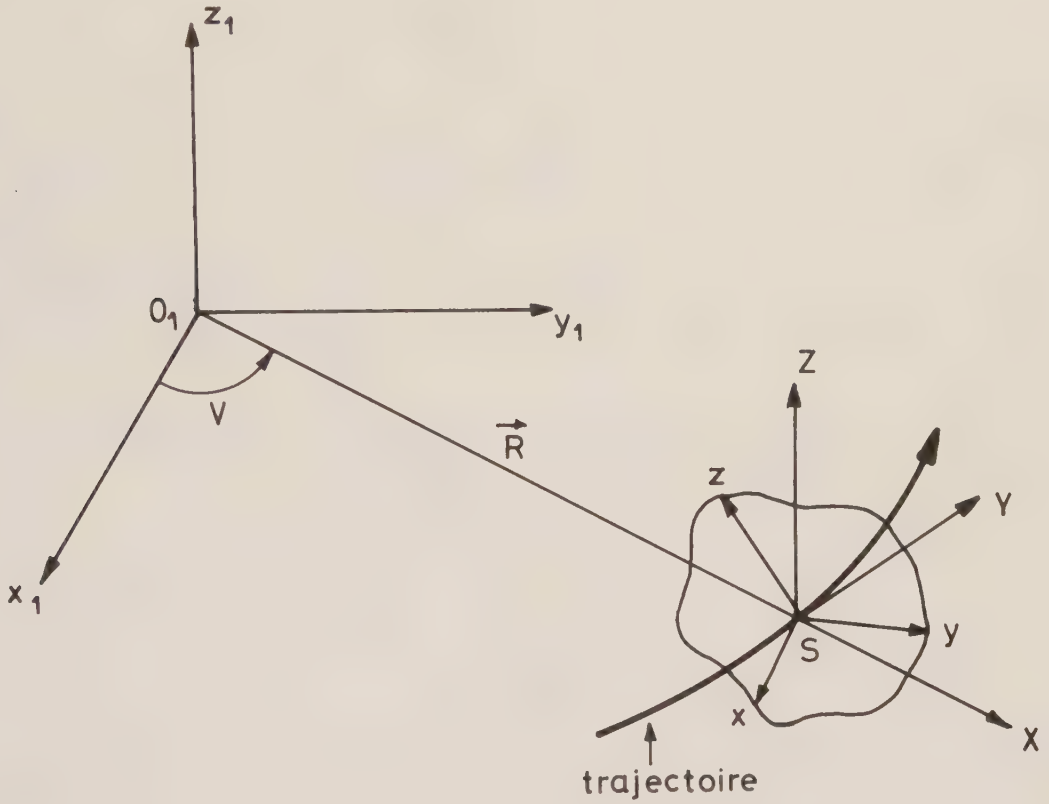


Figure 1

L'attitude du satellite sera définie par rapport au trièdre inertiel formé par X, porté par $\overrightarrow{O_1S}$, Z parallèle à $\overrightarrow{O_1z_1}$ et Y, de telle sorte que le trièdre soit direct.

Lions un trièdre central d'inertie au satellite, soit Sxyz, et définissons son orientation relativement à XYZ au moyen des angles de lacet, roulis et tangage Θ_1, Θ_2 et Θ_3.

D'après la 1ère partie de cette étude, ces angles resteront petits lorsque le corps sera stabilisé. Une première rotation Θ_1 autour de SX amène Y et Z en Y_1 et Z_1. Une seconde rotation Θ_2 autour de SY_1 amène Z_1 et X en z et X_1. Une dernière rotation Θ_3 autour de Sz amène X_1 et Y_1 en z et y.

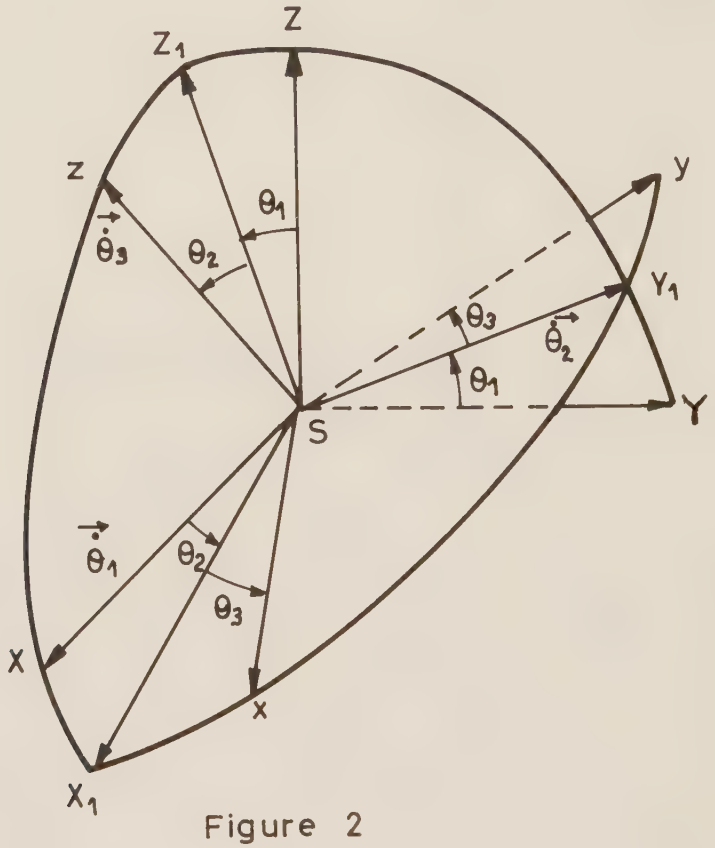


Figure 2

La matrice de passage est alors la suivante :

$$(I.1)\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta_2\cos\Theta_3 & -\cos\Theta_2\sin\Theta_3 & \sin\Theta_2 \\ \sin\Theta_1\sin\Theta_2\cos\Theta_3+\cos\Theta_1\sin\Theta_3 & \cos\Theta_1\cos\Theta_3-\sin\Theta_1\sin\Theta_2\sin\Theta_3 & -\sin\Theta_1\cos\Theta_2 \\ \sin\Theta_1\sin\Theta_3-\cos\Theta_1\sin\Theta_2\cos\Theta_3 & \sin\Theta_1\cos\Theta_3+\cos\Theta_1\sin\Theta_2\sin\Theta_3 & \cos\Theta_1\cos\Theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

Le vecteur rotation instantané permettant de passer de XYZ à xyz s'écrit dans le système d'axes liés :

$$(I.2)\quad \vec{\omega}_{xyz} \begin{cases} p' = \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin\theta_3 \\ q' = -\dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos\theta_3 \\ r' = \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 + \dot{\theta}_3 \end{cases}$$

Le vecteur rotation absolu permettant de passer de $x_1\ y_1\ z_1$ à x y z s'écrit alors :

$$(I.3)\quad \vec{\omega}_{xyz} \begin{cases} p = p' + \dot{V}(\sin\theta_1 \sin\theta_3 - \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3) \\ q = q' + \dot{V}(\sin\theta_1 \cos\theta_3 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3) \\ r = r' + \dot{V} \cos\theta_1 \cos\theta_2 \end{cases}$$

Si nous ne considérons que le mouvement de rotation autour du centre d'inertie, l'application des équations de Lagrange au mouvement nous conduit à :

$$(I.4)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)qr = \dfrac{\cos\theta_3}{\cos\theta_2}\dfrac{\partial U}{\partial\theta_1} + \sin\theta_3 \dfrac{\partial U}{\partial\theta_2} - \dfrac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2}\cos\theta_3 \dfrac{\partial U}{\partial\theta_3} \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)pr = -\dfrac{\sin\theta_3}{\cos\theta_2}\dfrac{\partial U}{\partial\theta_1} + \cos\theta_3 \dfrac{\partial U}{\partial\theta_2} + \dfrac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2}\sin\theta_3 \dfrac{\partial U}{\partial\theta_3} \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq = \dfrac{\partial U}{\partial\theta_3} \end{cases}$$

A, B, C sont les moments principaux d'inertie du satellite, p, q, r les quantités précédemment définies, et U représente la fonction de forces correspondant à l'attraction newtonienne d'un corps central sur un satellite de forme quelconque.

Les premiers membres de ces équations ne sont rien d'autre que les composantes du moment cinétique sur les axes principaux d'inertie. Les seconds membres représentent les forces extérieures dérivant d'une fonction de forces U, en projection sur les mêmes axes.

Dans le cas d'un corps central sphérique, homogène, la fonction de forces s'écrit alors : (voir Annexe 1)

$$(I.5)\quad U = g_0 R_0^2 \left[\frac{M}{R} + \frac{3}{2R^3} \left\{ \frac{A+B+C}{3} - A \cos^2\theta_2 \cos^2\theta_3 - B \cos^2\theta_2 \sin^2\theta_3 - C \sin^2\theta_2 \right\} + \ldots \right]$$

g_0 représente l'attraction de la pesanteur au niveau du sol.
R_0 est le rayon de la terre supposée sphérique.
M est la masse de la terre.
R est le module du rayon vecteur $\overrightarrow{O_1 S}$.

En reportant ce résultat dans les équations du mouvement, on obtient alors le système suivant :

$$(I.6)\quad \begin{cases} A \dfrac{dp}{dt} + (C-B)qr = \dfrac{3g_0 R_0^2}{R^3} (B-C) \sin\theta_2 \cos\theta_2 \sin\theta_3 \\ B \dfrac{dq}{dt} + (A-C)pr = \dfrac{3g_0 R_0^2}{R^3} (A-C) \sin\theta_2 \cos\theta_2 \cos\theta_3 \\ C \dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq = \dfrac{3g_0 R_0^2}{R^3} (A-B) \cos^2\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_3 \end{cases}$$

Plutôt que de remplacer p, q, r par leurs valeurs et obtenir ainsi un système de 3 équations différentielles du second ordre en θ_1, θ_2, θ_3, il est préférable de le conserver sous cette forme en lui associant les relations de définition de $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_3$.
On obtient ainsi un système de 6 équations différentielles du 1er ordre où les seconds membres sont des fonctions quelconques des variables p, q, r, θ_1, θ_2, θ_3 supposées alors toutes indépendantes.
Il ne faut pas oublier d'ajouter à ce système une équation définissant R(t) si le satellite parcourt une orbite excentrique.
Le mouvement d'attitude résulte alors de la résolution du système suivant :

$$
(I.7)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{B-C}{A}\left[qr + \dfrac{3g_0 R_0^2}{R^3}\sin\theta_2\cos\theta_2\sin\theta_3\right] \\
\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{C-A}{B}\left[pr - \dfrac{3g_0 R_0^2}{R^3}\sin\theta_2\cos\theta_2\cos\theta_3\right] \\
\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{A-B}{C}\left[pq + \dfrac{3g_0 R_0^2}{R^3}\sin\theta_3\cos\theta_3\cos^2\theta_2\right] \\
\dfrac{d\theta_1}{dt} = \dfrac{1}{\cos\theta_2}\left[p\cos\theta_3 - q\sin\theta_3 + \dot{V}\cos\theta_1\sin\theta_2\right] \\
\dfrac{d\theta_2}{dt} = p\sin\theta_3 + q\cos\theta_3 - \dot{V}\sin\theta_1 \\
\dfrac{d\theta_3}{dt} = r - \dfrac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2}\left[p\cos\theta_3 - q\sin\theta_3 + \dot{V}\cos\theta_1\sin\theta_2\right] - \dot{V}\cos\theta_1\cos\theta_2 \\
\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{R_0\sqrt{g_0}}{a^{3/2}(1-e^2)^{3/2}}(1 + e\cos V)^2
\end{cases}
$$

Les différents mouvements possibles seront fonction :

de la forme du corps (A, B, C)

de la forme de l'orbite (e, h)

des conditions initiales (θ_{10}, θ_{20}, θ_{30}, $\dot{\theta}_{10}$, $\dot{\theta}_{20}$, $\dot{\theta}_{30}$)

II - REMARQUES d'ORDRE GENERAL et PREMIERES CONCLUSIONS dans le CAS des MOUVEMENTS de FAIBLE AMPLITUDE sur ORBITE CIRCULAIRE ou LEGEREMENT ELLIPTIQUE

II.1 Cartes des configurations

On peut ramener la connaissance de la forme du satellite à deux coefficients K_1 et K_2 définis de la façon suivante :

$$K_1 = \frac{B-C}{A}$$

$$K_2 = \frac{C-A}{B}$$

En effet, $\frac{A-B}{C}$, le dernier coefficient, soit K_3, peut être défini grâce à la relation

$$K_1 + K_2 + K_3 + K_1K_2K_3 = 0$$

On peut donc prendre l'habitude de représenter en fonction de la forme du corps $K_2 = f(K_1)$ les zones correspondant à des configurations stables, c'est-à-dire, donnant naissance à des mouvements de faible amplitude en θ_1, θ_2, θ_3.

Si on définit X, Y, Z tels que X, Y soient dans le plan K_1K_2, Z étant perpendiculaire à ce plan, on peut donner une représentation perspective des configurations du satellite pour K_1 et K_2 fixés. Remarquons que le plan K_1K_2 est alors limité à un carré de côté 2.

Trois cartes nous permettront alors d'expliquer nos résultats. Ce seront les figures 3.4.5.

Fig. 3 : carte des configurations $1.K_2 = f(K_1)$

Fig. 4 : valeurs des moments d'inertie A et B sur cette carte relativement à C pris pour unité. Carte des configurations 2

Fig. 5 : $f(K_1, K_2, K_3) = 0$

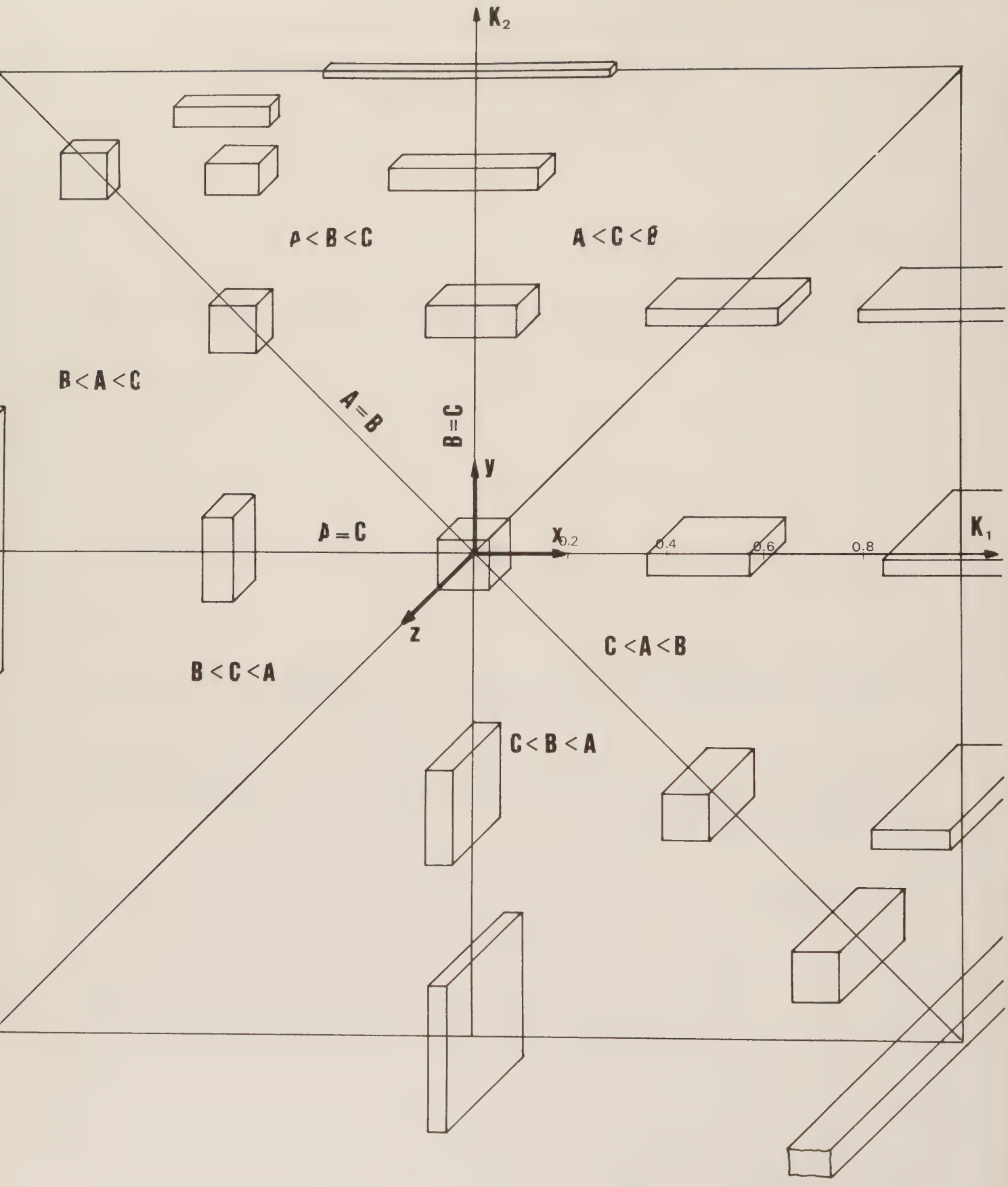


Figure 3

CARTE DES CONFIGURATIONS 2 (C est pris pour unité)

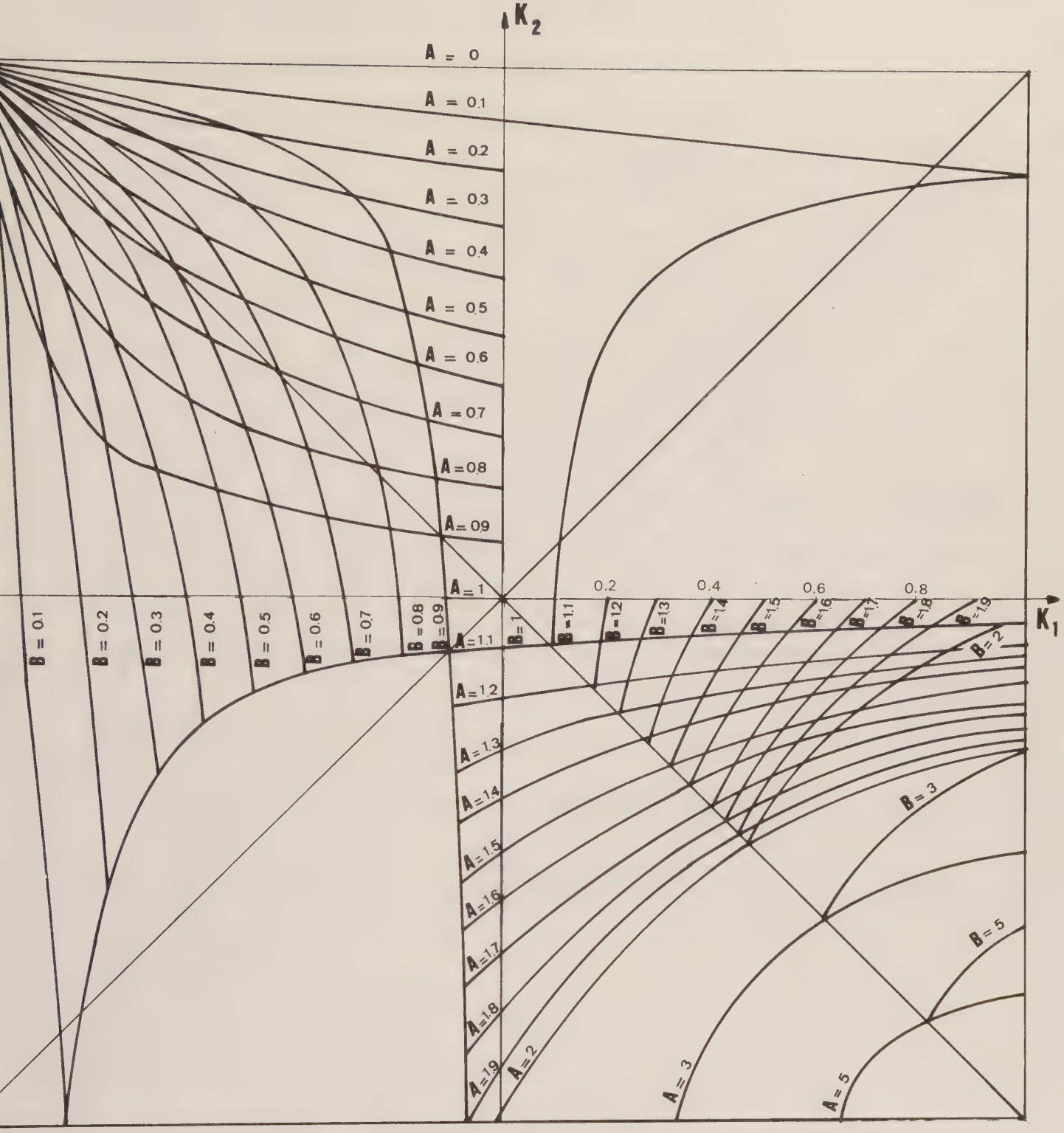


Figure 4

$K_3 = f\ (K_2, K_1)$

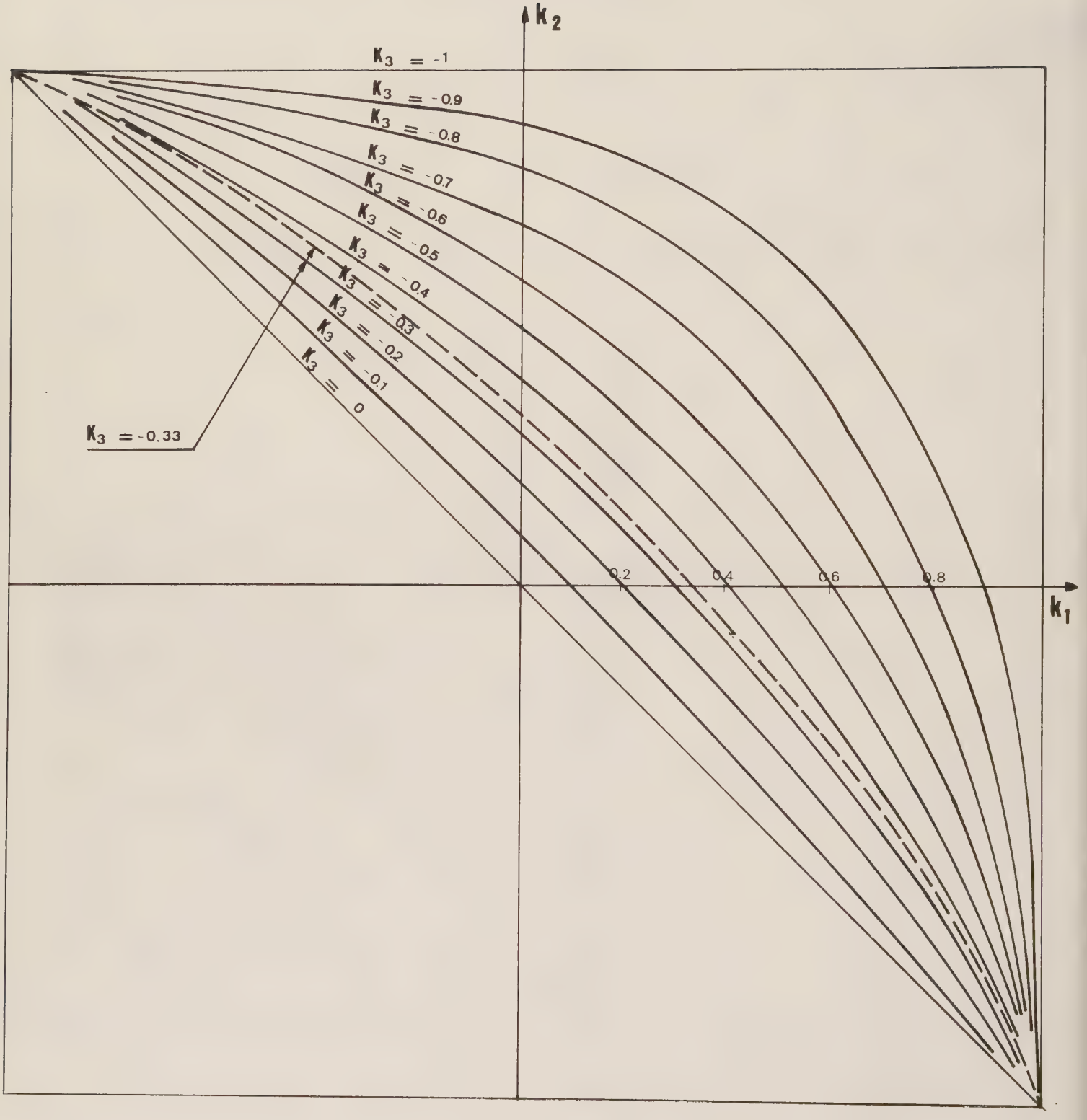


Figure 5

II.2 Cas d'une orbite circulaire : point de vue énergétique

L'énergie cinétique du satellite s'écrit :

$$2T = mV_S^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

Appelons $\vec{e}_i$ le vecteur unitaire porté par l'axe i.

Or,

$$p = p' + \Omega_0(\vec{e}_Z, \vec{e}_x)$$

$$q = q' + \Omega_0(\vec{e}_Z, \vec{e}_y)$$

$$r = r' + \Omega_0(\vec{e}_Z, \vec{e}_z)$$

$$2T = mV_S^2 + Ap'^2 + Bq'^2 + Cr'^2 + \Omega_0^2 \left[A(\vec{e}_Z,\vec{e}_x)^2 + B(\vec{e}_Z,\vec{e}_y)^2 + C(\vec{e}_Z,\vec{e}_z)^2 \right]$$

$$+2\Omega_0 \left[Ap'(\vec{e}_Z,\vec{e}_x) + Bq'(\vec{e}_Z,\vec{e}_y) + Cr'(\vec{e}_Z,\vec{e}_z) \right]$$

2T n'est pas une forme quadratique par rapport aux $\dot{\theta}_i$ (dérivées des variables de position θ_i par rapport au temps).

L'intégrale d'énergie sera donc remplacée par l'intégrale de Painlevé.

Si $U = mR^2\Omega_0^2 + \frac{3}{2}\Omega_0^2 \left[\frac{A+B+C}{3} - A(\vec{e}_X,\vec{e}_x)^2 - B(\vec{e}_X,\vec{e}_y)^2 - C(\vec{e}_X,\vec{e}_z)^2 \right] + E'$

L'intégrale de Painlevé s'écrira en appelant E toutes les constantes :

$$(II.2.1)\quad \frac{1}{2}\left[Ap'^2+Bq'^2+Cr'^2 \right] + \frac{3}{2}\Omega_0^2 \left[A(\vec{e}_X,\vec{e}_x)^2+B(\vec{e}_X,\vec{e}_y)^2+C(\vec{e}_X,\vec{e}_z)^2 \right]$$

$$- \frac{\Omega_0^2}{2}\left[A(\vec{e}_Z,\vec{e}_x)^2 +B(\vec{e}_Z,\vec{e}_y)^2+C(\vec{e}_Z,\vec{e}_z)^2 \right] = E$$

En tenant compte de :

$$(\vec{e}_X,\vec{e}_x)^2 + (\vec{e}_X,\vec{e}_y)^2 + (\vec{e}_X,\vec{e}_z)^2 = 1$$

$$(\vec{e}_Z,\vec{e}_x)^2 + (\vec{e}_Z,\vec{e}_y)^2 + (\vec{e}_Z,\vec{e}_z)^2 = 1$$

l'intégrale s'écrit :

$$\frac{1}{2}\left[Ap'^2 + Bq'^2 + Cr'^2 \right] + \frac{3}{2}\Omega_0^2 \left[(B-A)\,(\vec{e}_X,\vec{e}_y)^2 + (C-A)\,(\vec{e}_X,\vec{e}_z)^2 \right]$$

$$- \frac{\Omega_0^2}{2}\left[(A-C)\,(\vec{e}_Z,\vec{e}_x)^2 + (B-C)\,(\vec{e}_Z,\vec{e}_y)^2 \right] = h_0 \qquad \text{(II.2.2)}$$

On peut également utiliser cette autre forme [redacted] intéressante de l'intégrale de Painlevé :

$$\frac{1}{2}\left[Ap'^2 + Bq'^2 + Cr'^2 \right] + \frac{3}{2}\Omega_0^2 \left[A(\vec{e}_X,\vec{e}_x)^2 + B(\vec{e}_X,\vec{e}_y)^2 + C(\vec{e}_X,\vec{e}_z)^2 - C \right]$$

$$+ \frac{\Omega_0^2}{2}\left[A - A(\vec{e}_Z,\vec{e}_x)^2 - B(\vec{e}_Z,\vec{e}_y)^2 - C(\vec{e}_Z,\vec{e}_z)^2 \right] = h'_0 \qquad \text{(II.2.3)}$$

Très rapidement, grâce au critère de Lyapunov, on peut retrouver les résultats de la première partie.

Rappelons en effet le critère de Lyapunov : l'origine étant une solution (ici $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$), si on peut trouver une fonction scalaire V définie positive dans un domaine D entourant l'origine, sauf à l'origine où elle est nulle, et dont la dérivée totale par rapport au temps est soit du signe opposé à V ou nulle dans D, la position d'équilibre est stable. (C'est une condition suffisante de stabilité).

L'équation (II.2.2) peut très bien être une fonction de Lyapunov. Elle est définie positive sauf à l'origine si $A < B < C$ et sa dérivée est toujours nulle. L'origine est donc une position d'équilibre stable, car cette condition est suffisante.

Conclusion : Une condition suffisante pour la stabilité de l'équilibre relatif d'un corps, sur orbite circulaire, est que le plus grand axe de l'ellipsoïde d'inertie s'aligne sur le rayon vecteur et que le plus petit axe soit normal au plan de l'orbite.

Ces conditions obtenues sont les mêmes que celles qui rendent maximum la fonction de forces due à l'attraction newtonienne et aux forces centrifuges (II.2.3)

$$U' = -\frac{\Omega_0^2}{2}\left[A - A(\vec{e}_Z,\vec{e}_x)^2 - B(\vec{e}_Z,\vec{e}_y)^2 - C(\vec{e}_Z,\vec{e}_z)^2 \right]$$

$$-\frac{3\Omega_0^2}{2}\left[A\,(\vec{e}_X,\vec{e}_x)^2 + B(\vec{e}_X,\vec{e}_y)^2 + C(\vec{e}_X,\vec{e}_z)^2 - C \right]$$

U' sera maximum si chaque terme entre parenthèses est minimum.

$$A - A(\vec{e}_Z,\vec{e}_x)^2 - B(\vec{e}_Z,\vec{e}_y)^2 - C(\vec{e}_Z,\vec{e}_z)^2 \qquad \text{est minimum si}$$

$$A(\vec{e}_Z,\vec{e}_x)^2 + B(\vec{e}_Z,\vec{e}_y)^2 + C(\vec{e}_Z,\vec{e}_z)^2 \qquad \text{est maximum}$$

De même, pour la deuxième parenthèse, il faut que

$$A(\vec{e}_X,\vec{e}_x)^2 + B(\vec{e}_X,\vec{e}_y)^2 + C(\vec{e}_X,\vec{e}_z)^2 \qquad \text{soit minimum.}$$

Chacune de ces quantités représente pour la première, le moment d'inertie du corps selon la direction Z, pour la seconde le moment d'inertie du corps selon la direction X. U' est donc maximum si le corps aligne son axe de moindre moment d'inertie selon X (rayon vecteur), son axe de plus grand moment d'inertie selon Z (perpendiculaire au plan de l'orbite).

Pour que le satellite oscille autour de sa position d'équilibre sans basculer, son énergie cinétique dans son mouvement du centre d'inertie doit rester suffisamment petite.

Les trois termes de l'expression (II.2.2) sont tous des quantités positives qui peuvent nous permettre d'estimer l'amplitude des oscillations en fonction de h_0 déterminé par les conditions initiales.

$$(\vec{e}_X,\vec{e}_y)^2 < \frac{2h_0}{3\Omega_0^2\ (B-A)} \qquad (\vec{e}_X,\vec{e}_y)^2 < \frac{2h_0}{3\Omega_0^2\ (C-A)}$$

$$(\vec{e}_Z,\vec{e}_y)^2 < \frac{2h_0}{\Omega_0^2\ (C-A)} \qquad (\vec{e}_Z,\vec{e}_y)^2 < \frac{2h_0}{\Omega_0^2\ (C-B)}$$

Pour que le corps oscille, les conditions suivantes doivent être respectées.

$$\frac{2h_0}{3\Omega_0^2\ (B-A)} < 1$$

$$\frac{2h_0}{3\Omega_0^2\ (C-A)} < 1$$

$$\frac{2h_0}{\Omega_0^2\ (C-A)} < 1$$

$$\frac{2h_0}{\Omega_0^2\ (C-B)} < 1$$

soit :

$$\left(\begin{array}{l} \dfrac{2h_0}{3\Omega_0^2\ (B-A)} < 1 \\ \\ \dfrac{2h_0}{\Omega_0^2\ (C-A)} < 1 \\ \\ \dfrac{2h_0}{\Omega_0^2\ (C-A)} < 1 \end{array}\right.$$

Comme $A < B < C$

$$C - B < C - A$$

Si $\dfrac{2h_0}{\Omega_0^2 (C-B)} < 1$, la 2e condition est aussi vérifiée.

La condition pour avoir des oscillations qui ne s'amplifieront pas est la suivante (*)

$$h_0 < \inf \left[\frac{3}{2} \Omega_0^2 (B-A), \frac{\Omega_0}{2} (C-B) \right] \qquad \text{(II.2.4)}$$

S'il en est ainsi, on aura "capturé" le satellite.

Supposons maintenant que le satellite ne puisse avoir qu'un mouvement dans le plan de tangage. Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 = 0 \\ p = q = 0 \end{cases} \qquad r = \dot{\theta}_3$$

La troisième équation du groupe (I.6) s'écrit alors :

$$\ddot{\theta}_3 - 3 \Omega_0^2 K_3 \sin \theta_3 \cos \theta_3 = 0$$

h_0 que nous avons défini précédemment représentait l'intégrale d'énergie. Ici, h_0 correspond aux oscillations dans le plan de tangage.

$$\left(\frac{d\theta_3}{dt} \right)^2 - 3 \Omega_0^2 K_3 \sin^2 \theta_3 = \frac{2h_0}{C} \qquad \text{(II.2.5)}$$

Nous venons de voir que des positions d'équilibre stables du satellite pouvaient exister si K_3 est négatif.

Posons $3 K_3 = - \Omega^2$

$$\dot{\theta}_3^2 = - \Omega^2 \Omega_0^2 \sin^2 \theta_3 + \frac{2h_0}{C}$$

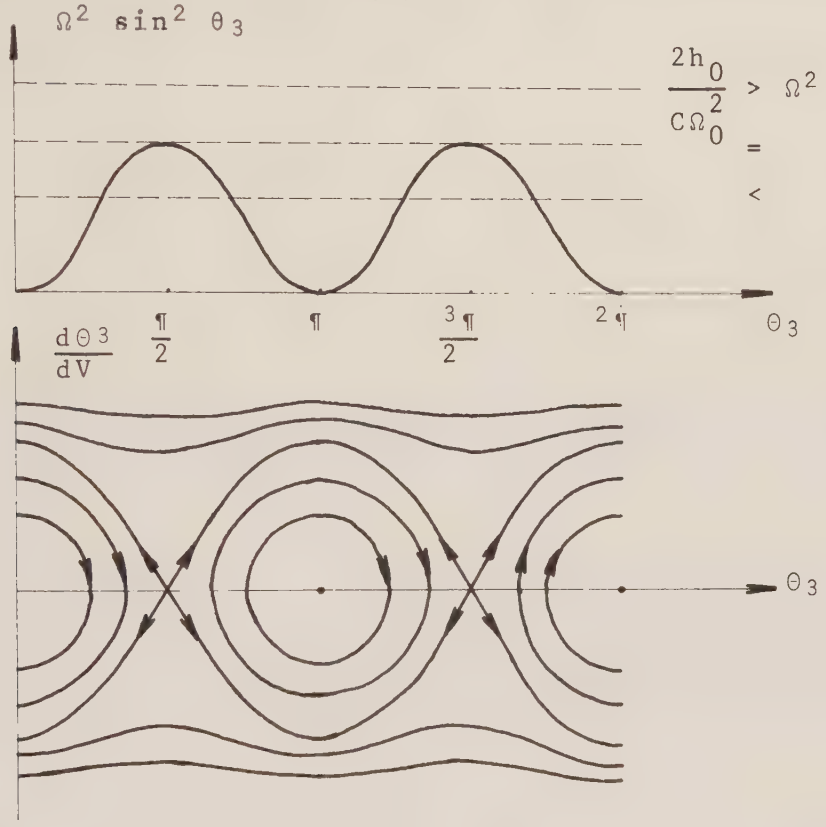
(*) BELETSKII.V.V. "The Libration of a Satellite"
NASA Technical Translation F.10

Pour éliminer Ω_0, utilisons l'anomalie vraie V comme nouvelle variable.

$$(II.2.6) \qquad \left(\frac{d\theta_3}{dV}\right)^2 = -\Omega^2 \sin^2 \theta_3 + \frac{2h_0}{C\Omega_0^2}$$

Trois cas peuvent se présenter selon que $\frac{2h_0}{C\Omega_0^2}$ est supérieur, égal ou inférieur à Ω^2.

Si B > A, la représentation dans le plan de phase $\theta_3, \frac{d\theta_3}{dV}$, de ces courbes intégrales nous donne (★)



Nous trouvons les positions stables pour $\theta_3 = 0$ ou Π; c'est-à-dire que l'axe le plus long de l'ellipsoïde d'inertie pointe selon le rayon vecteur.

Si B < A, les positions d'équilibre interviendraient pour $\theta_3 = \frac{\Pi}{2}$ ou $\frac{3\Pi}{2}$. L'axe long y pointerait selon le rayon vecteur.

(★) GILLE-DECAULNE-PELLEGRIN. "Méthodes d'étude des systèmes asservis non linéaires" DUNOD Paris 1967 p.151.

Pour h_0 suffisamment petit, on a donc des oscillations possibles et un mouvement périodique, lorsque

$$\frac{2h_0}{C\Omega_0^2} < \Omega^2$$

C'est-à-dire

$$\frac{d\theta_3}{dV} < \Omega \left|\cos \theta_{30}\right| \qquad (II.2.7)$$

Ce résultat a déjà été utilisé page 35 au paragraphe V.2.

II.3 Cas particulier de l'orbite circulaire et des petites oscillations en roulis, lacet, tangage. Solutions linéarisées.

Nous fixons un des paramètres du mouvement : l'excentricité de l'orbite est nulle. Dans ce cas, $\dot{V}$, vitesse angulaire sur l'orbite, est constante et vaut

$$\frac{R_0 \sqrt{g_0}}{a^{3/2}} = \Omega_0$$

Reportons ce résultat dans les équations générales (I.6) et intéressons-nous seulement aux petits mouvements autour de la position d'équilibre.

Nous pouvons alors linéariser les équations obtenues en θ_1, θ_2, θ_3.

Le système se réduit à :

$$\text{(II.3.1)} \qquad \begin{cases} A\ddot{\theta}_1 + \Omega_0^2 (C-B)\theta_1 = (B+A-C)\Omega_0\dot{\theta}_2 \\ B\ddot{\theta}_2 + 4\,\Omega_0^2 (C-A)\theta_2 = -(B+A-C)\Omega_0\dot{\theta}_1 \\ C\ddot{\theta}_3 + 3\,\Omega_0^2 (B-A)\theta_3 = 0 \end{cases}$$

Le tangage est découplé des deux autres mouvements. Le lacet et le roulis ne doivent donc intervenir qu'au second ordre sur le tangage. Ce résultat va nous inciter à étudier plus particulièrement uniquement les oscillations dans le plan de tangage (plan de l'orbite).

En utilisant la transformée de Laplace, on peut alors étudier la stabilité de ce système linéaire. DELP (*) en 1960 a ajouté à la zône de Lagrange, déjà bien connue, obtenue par une analyse directe au paragraphe précédent, (phénomène de libration de la lune), une nouvelle zone conditionnellement stable (figure 6). Cette zone provient en fait d'un effet gyroscopique dû au mouvement du satellite sur son orbite.

Les principales conclusions sont les suivantes : un corps de forme quelconque, soumis au seul gradient de gravité, a tendance à orienter son axe de moindre moment d'inertie (conditionnellement de plus grand) selon la verticale gravitationnelle, et son axe de plus grand moment d'inertie (conditionnellement de plus faible), selon la normale au plan de l'orbite. Cette conclusion est conforme à la première partie de cette étude.

(*) DE BRA D.B. and DELP R.H. "Rigid Body Attitude Stability and Natural Frequencies in a Circular Orbit". The Journal of the Astronautical Sciences. Vol. 8, 1961, pp.14.17.

Les pulsations de tangage ω_3, lacet ω_1, roulis ω_2 sont du même ordre de grandeur que la pulsation du mouvement sur l'orbite Ω_0.

La figure 7, extension directe de la figure 5, représente les valeurs de K_1 et K_2 pour lesquelles

$$\frac{\omega_3}{\Omega_0} = \text{constante}$$

Lorsque nous passerons à l'étude du mouvement d'attitude sur orbite excentrique, des valeurs comme

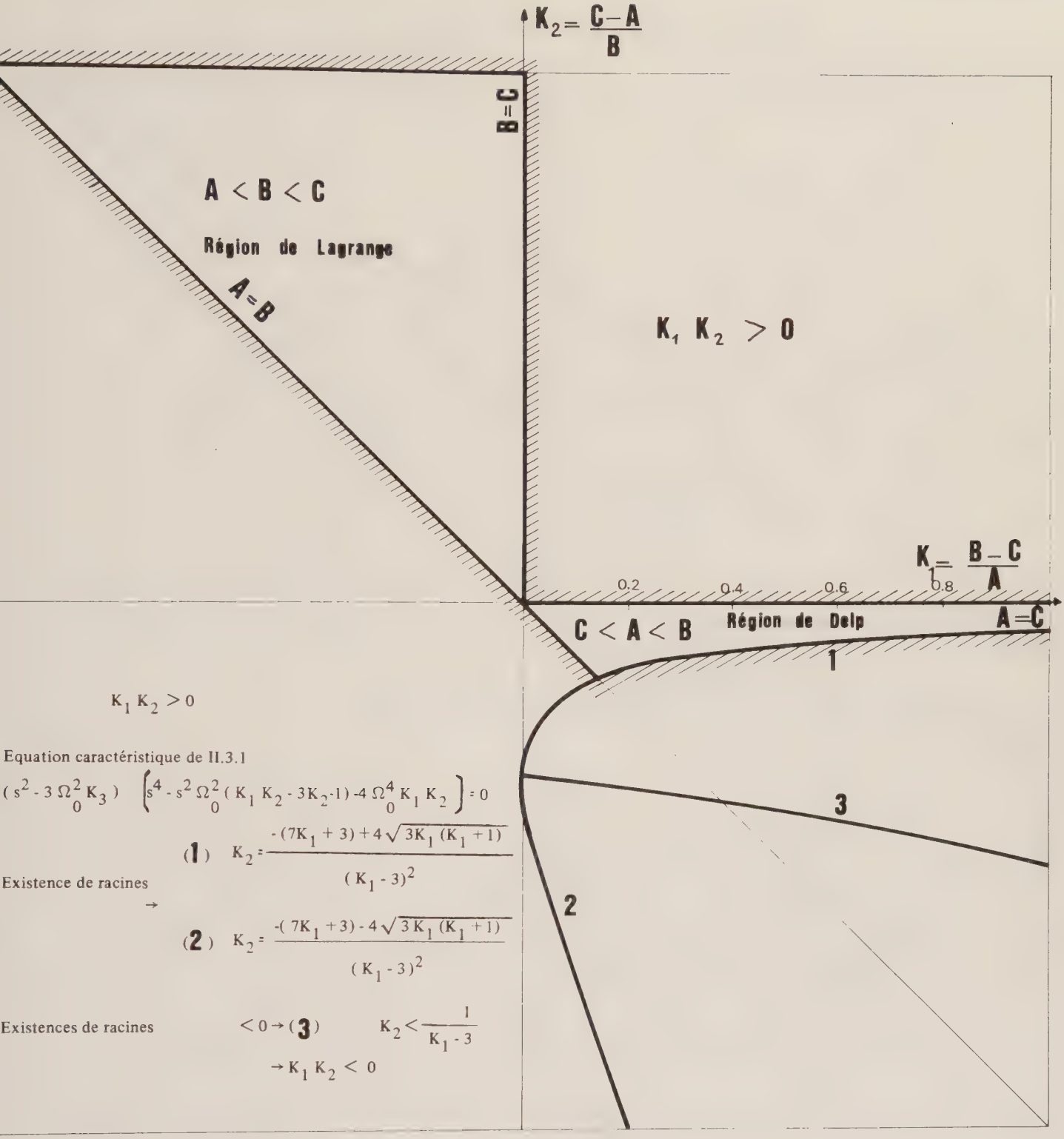
$$\frac{\omega_3}{\Omega_0} = 1 \text{ ou } \frac{1}{2}$$

vont jouer un rôle important : l'excitation externe due au mouvement sur l'orbite a une fréquence correspondant à la fréquence de tangage ; il y aura résonance.

La figure 8 montre sur la même carte des configurations les valeurs de K_1K_2 pour lesquelles

$$\frac{\omega_1}{\Omega_0} \text{ et } \frac{\omega_2}{\Omega_0} = \text{cte.}$$

Sont précisées également sur ces figures d'autres courbes correspondant à des résonances "internes" (e=0) et "externes" ($e \neq 0$). Nous en reparlerons au prochain paragraphe.



$K_1 K_2 > 0$

Equation caractéristique de II.3.1

$$(s^2 - 3\Omega_0^2 K_3)\left\{s^4 - s^2\Omega_0^2(K_1 K_2 - 3K_2 - 1) - 4\Omega_0^4 K_1 K_2\right\} = 0$$

(1) $K_2 = \dfrac{-(7K_1+3)+4\sqrt{3K_1(K_1+1)}}{(K_1-3)^2}$

Existence de racines →

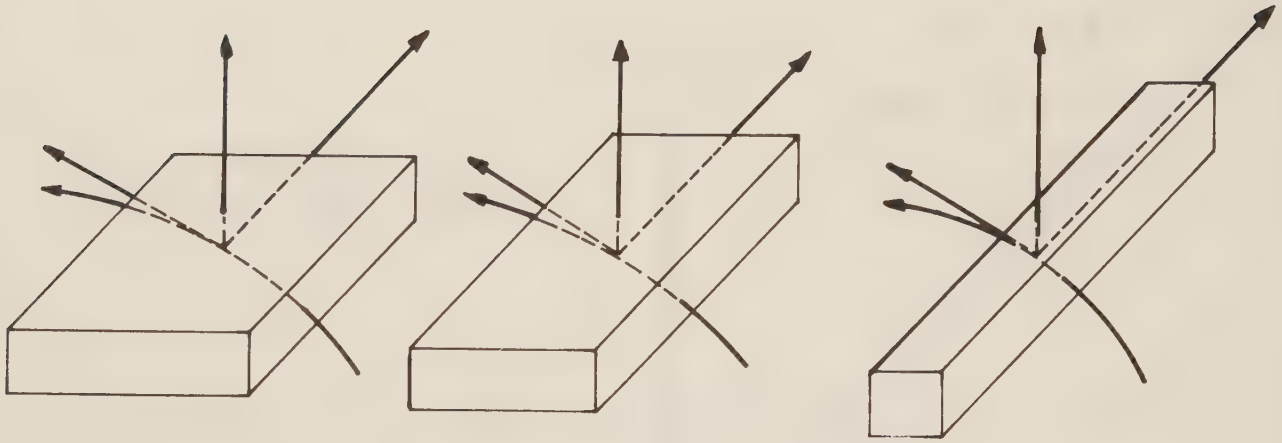
(2) $K_2 = \dfrac{-(7K_1+3)-4\sqrt{3K_1(K_1+1)}}{(K_1-3)^2}$

Existences de racines $< 0 \rightarrow$ (3) $K_2 < \dfrac{1}{K_1 - 3}$

$\rightarrow K_1 K_2 < 0$

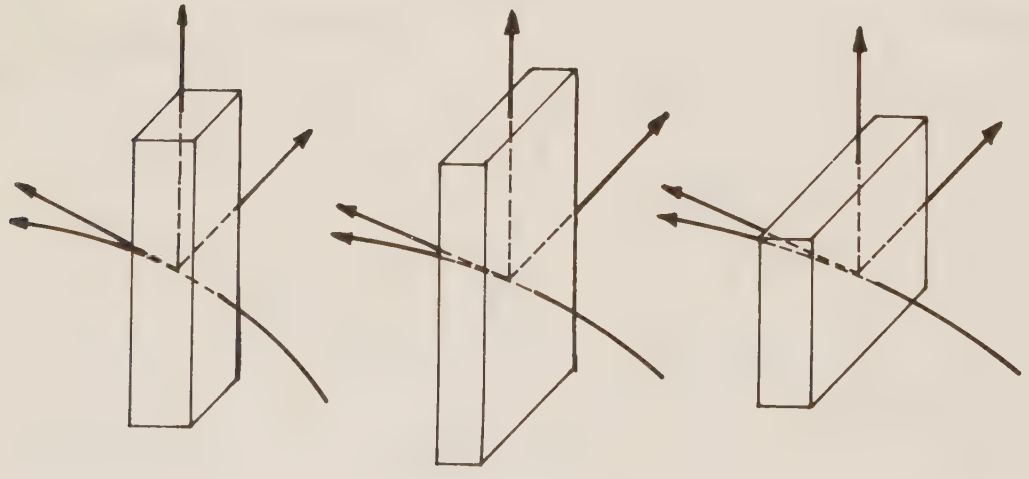
Figure 6

La région de LAGRANGE correspond aux configurations suivantes :



A = B < C A < B < C A < B = C

La région de DELP correspond à certaines configurations du type suivant :



C < A = B C < A < B C = A < B

Figure 6bis

Courbes $\frac{\omega_3}{\Omega_0}$ = constante

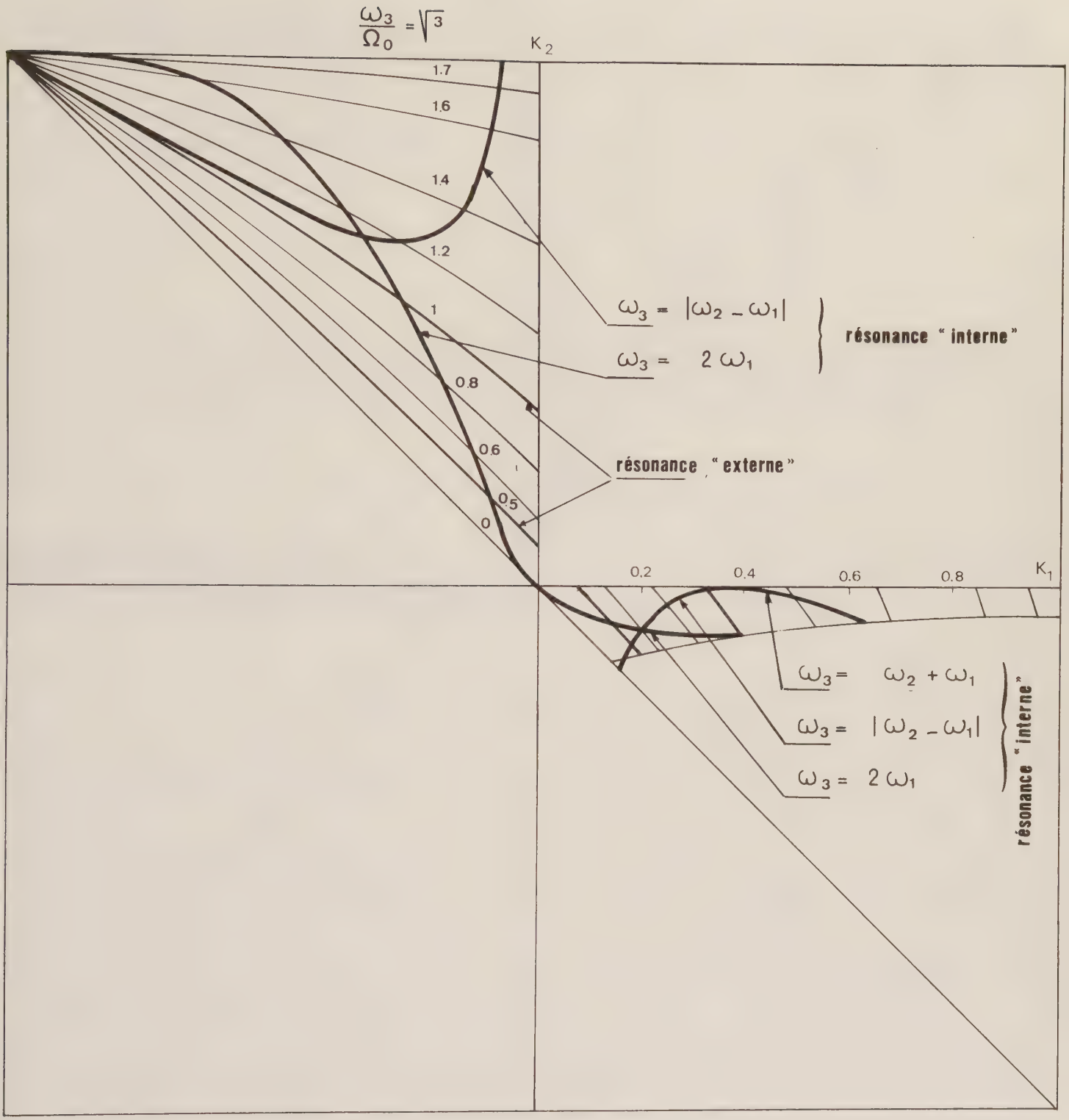


Figure 7

Courbes $\frac{\omega_1}{\Omega_0}$ ou $\frac{\omega_2}{\Omega_0}$ = constante

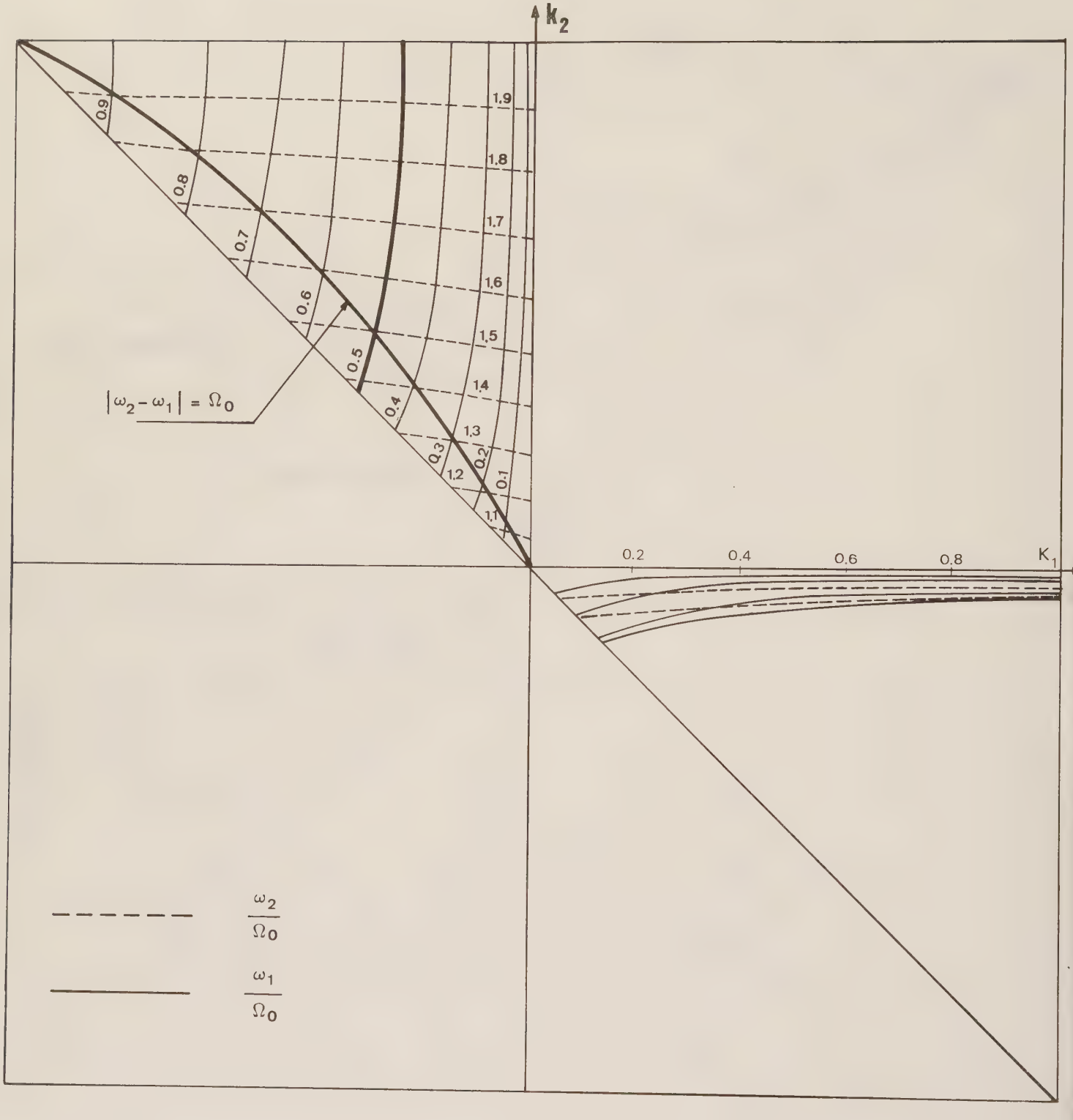


Figure 8

II.4 Approche analytique de la solution dans le cas de petits mouvements sur orbite légèrement elliptique par la méthode d'Hamilton Jacobi. Résonance "externe".

Pour simplifier l'écriture de certaines équations, définissons la matrice de passage de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Nous avons précédemment utilisé la "Lagrangienne" pour écrire les équations du mouvement. Si nous ne nous intéressons toujours qu'au mouvement par rapport au centre d'inertie, la partie utile peut se réduire à :

$$(II.4.1.) \qquad L' = \frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2) - \frac{3g_0 R_0^2}{2R^3}\left[(A-B)\alpha_1^2 + (C-B)\alpha_3^2\right]$$

Appelons $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$, $q_3 = \theta_3$ les paramètres de configuration que nous utilisons. Introduisons leurs quantités conjuguées p_1, p_2, p'_3.

$$(II.4.2.) \quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial L'}{\partial \dot{q}_1} = Ap\cos q_2 \cos q_3 - Bq \cos q_2 \sin q_3 + Cr \sin q_2 \\ p_2 = \dfrac{\partial L'}{\partial \dot{q}_2} = Ap \sin q_3 + Bq \cos q_3 \\ p'_3 = \dfrac{\partial L'}{\partial \dot{q}_3} = Cr \end{cases}$$

L'"Hamiltonien" utile s'écrit alors :

$$H' = \sum_{i=1}^{3} p_i \dot{q}_i - L'$$

Or, $p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + p'_3\dot{q}_3 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - \dot{V}(Ap\ \gamma_1 + Bq\ \gamma_2 + Cr\ \gamma_3)$

et $H' = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - \dot{V}(Ap\ \gamma_1 + Bq\ \gamma_2 + Cr\ \gamma_3)$

(II.4.3)
$$+ \frac{3g_0 R_0^2}{2R^3}\{(A-B)\ \alpha_1^2 + (C-B)\ \alpha_3^2\}$$

Soit en fonction des paramètres q_i et p_i.

$$H' = \frac{1}{2A\cos^2 q_2}\left[p_1 \cos q_3 + p_2 \sin q_3 \cos q_2 - p'_3 \sin q_2 \cos q_3\right]^2$$

$$+ \frac{1}{2B\cos^2 q_2}\left[-p_1 \sin q_3 + p_2 \cos q_3 \cos q_2 + p'_3 \sin q_2 \sin q_3\right]^2 + \frac{p'^2_3}{2C}$$

(II.4.4.)
$$- \dot{V}\left[-p_1 \cos q_1 \frac{\sin q_2}{\cos q_2} + p_2 \sin q_1 + p'_3 \frac{\cos q_1}{\cos q_2}\right]$$

$$+ \frac{3g_0 R_0^2}{2R^3}\left[(A-B)\cos^2 q_2 \cos^2 q_3 + (C-B)\sin^2 q_2\right]$$

Les équations du mouvement sont alors les suivantes :

(II.4.5.)
$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{\partial H'}{\partial p_1} \\ \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H'}{\partial p_2} \\ \dot{q}_3 = \dfrac{\partial H'}{\partial p'_3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H'}{\partial q_1} \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H'}{\partial q_2} \\ \dot{p}'_3 = -\dfrac{\partial H'}{\partial q_3} \end{cases}$$

Si les angles θ_1, θ_2, θ_3 sont très petits, au voisinage de la position d'équilibre, p1 et p2 le sont également si l'énergie est faible, soit $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_3$ très petits. Dans le cas d'une orbite très faiblement excentrique, on peut s'arranger également pour que le dernier moment conjugué soit très faible. Si n est le moyen mouvement sur l'orbite, posons $p_3 = p'_3 - Cn = C(r-n)$. Les équations du mouvement ne changent pas car :

$$\frac{\partial H'}{\partial p'_3} = \frac{\partial H'}{\partial p_3} \qquad \text{et} \qquad \dot{p}'_3 = \dot{p}_3$$

mais nous pourrons utiliser avantageusement le critère de Lyapunov. En supposant l'orbite très légèrement elliptique ($e \ll 1$) et θ_1, θ_2, θ_3 de même que $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_3$, très petits, nous pouvons écrire l'hamiltonien sous forme de développement en série de termes de degré de plus en plus élevé par rapport à l'ensemble des quantités p_i, q_i, e.

$$\text{Soit} \quad H' = H'_0 + H'_1 + H'_2 + H'_3 + \ldots$$

l'indice indiquant le degré des termes de H' par rapport aux infiniments petits q_i, p_i et e.

Nous pouvons utiliser les approximations suivantes : (*)

$$V = nt + 2e \sin nt$$

$$\dot{V} = n\,(1 + 2e \cos nt) \qquad \text{(II.4.6)}$$

$$\left(\frac{a}{R}\right)^3 = 1 + 3e \cos nt$$

d'où

$$\begin{cases} p = \dot{q}_1 - nq_2\,(1+2e\cos nt) + \dot{q}_2 q_3 + q_1 q_3 n\,(1+2e\cos nt) \\ q = \dot{q}_2 + nq_1\,(1+2e\cos nt) - \dot{q}_1 q_3 + q_2 q_3 n\,(1+2e\cos nt) \\ r = \dot{q}_3 + n\,(1+2e\cos nt) + \dot{q}_1 q_2 - \frac{n}{2}\,(q_1^2 + q_2^2)\,(1+2e\cos nt) \end{cases} \qquad \text{(II.4.7)}$$

Ces valeurs reportées dans II.4.3 nous permettent d'écrire en s'arrêtant au second ordre :

$$H' = \frac{A}{2}\left[\dot{q}_1^2 + n^2 q_2^2 - 2n\,\dot{q}_1 q_2\right] + \frac{B}{2}\left[\dot{q}_2^2 + n^2 q_1^2 + 2n\dot{q}_2 q_1\right]$$

$$+ \frac{1}{2C}\left[p_3 + Cn\right]^2 - n(1+2e\cos nt)\left[-Aq_2\,(\dot{q}_1 - nq_2) + Bq_1(\dot{q}_2 + nq_1)\right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{q_1^2}{2} - \frac{q_2^2}{2}\right)(p_3 + Cn)\right] + \frac{3}{2}n^2\,(1+3e\cos nt)\left[(B-A)(q_2^2+q_3^2+1) + (C-B)\,q_2^2\right]$$

(*) KOVALEVSKY J. "Introduction à la Mécanique Céleste". Collection A. Colin. Section Mathématiques n° 370 pp.93

En réduisant cette expression, nous obtenons :

$$H' = \frac{n^2}{2}(3A-3B-C) + \frac{n^2}{2} e \cos nt\,(9A-9B-4C) + \frac{A}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{B}{2}\dot{q}_2^2$$
$$+ \frac{1}{2C}p_3^2 - 2e\,np_3 \cos nt + \frac{n^2}{2}\left[\, 3(B-A)\,q_3^2 + 4(C-A)\,q_2^2 + (C-B)\,q_1^2 \,\right]$$

$$H' = H'_0 + H'_1 + H'_2$$

Seul H'_2 est utile et en se ramenant aux variables p_i, q_i,

$$H'_2 = \frac{1}{2A}\left[\, p_1 - (C-A)\,q_2 n \,\right]^2 + \frac{1}{2B}\left[\, \dot{p}_2 - Bn\,q_1 \right]^2 + \frac{1}{2C}p_3^2$$
(II.4.8)
$$- 2e\,n\,p_3 \cos nt + \frac{n^2}{2}\left[\, 3(B-A)\,q_3^2 + 4(C-A)\,q_2^2 + (C-B)\,q_1^2) \right]$$

en posant en première approximation

$$\begin{cases} p_1 = A\,\dot{q}_1 + n(C-A)\,q_2 \\ \\ p_2 = B\,\dot{q}_2 + Bn\,q_1 \\ \\ p_3 = C\,\dot{q}_3 + 2e\,Cn\cos nt \end{cases} \qquad \text{(II.4.9)}$$

Ecrivons alors les équations d'Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \dfrac{C-B}{A}n^2\,q_1 = \dfrac{A+B-C}{A}\,n\,\dot{q}_2 \\ \\ \ddot{q}_2 + 4\,\dfrac{C-A}{B}n^2\,q_2 = -\dfrac{A+B-C}{B}\,n\,\dot{q}_1 \\ \\ \ddot{q}_3 + 3\,\dfrac{B-A}{C}n^2\,q_3 = 2e\,n^2 \sin nt \end{cases} \qquad \text{(II.4.10)}$$

On retrouve bien dans le cas où e = 0 les équations II.3.1.

Le mouvement forcé, second membre de l'équation de tangage, est dû à l'excentricité au premier ordre.

Le mouvement forcé est de la forme

$$q_3 = - \frac{2e}{1 + 3 K_3} \sin nt$$

Il y aura donc résonance si $K_3 = - \frac{1}{3}$, c'est-à-dire $\Omega^2 = 1$

Cette résonance est tout-à-fait normale, puisque cela correspond à une excitation ayant la fréquence propre du mouvement.

Nous appellerons ce phénomène résonance "externe".

La courbe $K_3 = f(K_2, K_1) = - \frac{1}{3}$ est mise en évidence sur la figure 5 et nous allons voir son importance sur tous les résultats numériques qui vont suivre.

BELETSKII (★), en étudiant par la méthode de BOGOLINBOV et KRYLOV une solution particulière de l'équation que nous obtiendrons chapitre IV en IV.1.3, cherche les petites oscillations forcées d'un satellite sur une orbite elliptique. En plus de cette résonance obtenue par une autre méthode, il met également en évidence une résonance due à l'harmonique $\frac{1}{2}$.

Nous trouvons ce même résultat par la méthode de la balance harmonique au paragraphe IV.4.4 Chapitre IV.

Cette courbe de résonance est mise en évidence sur la figure 7 p.62.

(★) BELETSKII.V.V. "Libration of a satellite in an elliptical orbit" traduit de Iskusstvennye Sputniki Zemli dans Artifical Earth Satellite Vol.16 1963 pp.46-56.

III - RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS GENERALES. PREMIERES CONSEQUENCES.

III.1 Système d'équations à résoudre

La forme assez complexe du système d'équations à étudier nous impose de tenter d'abord une résolution numérique. Les conclusions que nous pourrons en tirer nous aideront à rechercher une solution ou tout au moins des explications analytiques.

Les équations générales (I.7), telles qu'elles se présentent actuellement, sont mal adaptées à une résolution par ordinateur. L'intégration de chacune des équations différentielles va demander à chaque pas l'appel d'un grand nombre de sous-programmes nécessaires à l'évaluation des fonctions trigonométriques des angles de lacet, roulis et tangage.

Il est préférable alors, pour exprimer les rotations définies précédemment, d'utiliser des paramètres utilisés depuis très longtemps par Hamilton et repris par la suite par Lur'é (*) sous forme de "rotations finies" ou par Fischer (**) sous forme de "quaternions". Ces paramètres commencent d'ailleurs à être réutilisés (***).

Les quaternions sont des nombres complexes d'ordre 4, c'est-à-dire des expressions du type $A = x_0 + x_1\, i + x_2\, j + x_3\, k$, où les composantes x_i ou coordonnées peuvent être réelles ou complexes. A tout vecteur on peut alors associer un quaternion "pur" où la quantité x_0 serait nulle. Un vecteur de composantes x_1, x_2, x_3 par rapport à un repère orthonormé quelconque s'écrira :
$\underset{\sim}{\vec{x}} = x_1\, i + x_2\, j + x_3\, k$.
Une rotation d'espace définie par un axe de vecteur unitaire $\vec{\rho}$ et une amplitude θ peut alors s'interpréter à l'aide du quaternion de module unité
$\lambda = \lambda_0 + i\,\lambda_1 + j\,\lambda_2 + k\,\lambda_3 = \lambda_0 + \lambda_v\,\vec{\rho}$ par la formule de rotation $\underset{\sim}{\vec{y}} = \lambda\, \underset{\sim}{\vec{x}}\, \bar{\lambda}$, le vecteur y étant le transformé du vecteur $\vec{x}$ dans la rotation considérée. En

---

* Lur'e : "Mécanique Analytique". Tome I. Masson et Cie. Editeurs. 1968.

** Fischer : "Universal Mechanics and Hamiltons Quaternions". Axion Institute Stockolm 1951.

*** ICKES B.P. : "A New Method For Performing Digital Control System Attitude Computations Using Quaternions". AIAA J. Vol.8. N°1. 1970. pp.13.17.

comparant le résultat de cette opération sur les quaternions et celui d'analyse vectorielle, on peut écrire le quaternion sous la forme

$$\lambda = \cos\frac{\Theta}{2} + \sin\frac{\Theta}{2}\,\underset{\sim}{\vec{\rho}}$$

C'est une extension de la rotation dans l'espace à deux dimensions caractérisées par le nombre complexe $e^{j\Theta}$.
La formule de rotation appliquée à chacun des vecteurs unitaires $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ du trièdre de référence du satellite donne la matrice de changement de base.

$$\begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}$$

$$\text{(III.1.1)}\quad A = \begin{bmatrix} 2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1 & 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_2^2) - 1 & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1 \end{bmatrix}$$

La détermination des paramètres d'Halmilton en fonction des angles Θ_1, Θ_2, Θ_3 est faite dans l'annexe 2. Les équations différentielles du mouvement de rotation y sont développées également et l'on obtient alors, après transformation, un système de 8 équations différentielles du premier ordre où les seconds membres ne sont plus que des quantités algébriques. Sous cette forme, il y a un gain de temps appréciable lors du passage à l'ordinateur. Le système s'écrit de la façon suivante :

$$
(III.1.2)\quad
\begin{cases}
\dfrac{dp}{dt} = K_1 \left[qr - 12 \dfrac{g_0 R_0^2}{R^3} (\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3)(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) \right] \\
\dfrac{dq}{dt} = K_2 \left[pr - 6 \dfrac{g_0 R_0^2}{R^3} (\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3)\left\{2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1\right\} \right] \\
\dfrac{dr}{dt} = K_3 \left[pq - 6 \dfrac{g_0 R_0^2}{R^3} (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3)\left\{2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1\right\} \right] \\
\dfrac{d\lambda_0}{dt} = -\dfrac{1}{2} \left[p\,\lambda_1 + q\,\lambda_2 + (r-\dot{V})\,\lambda_3 \right] \\
\dfrac{d\lambda_1}{dt} = \dfrac{1}{2} \left[p\,\lambda_0 + (r+\dot{V})\,\lambda_2 - q\,\lambda_3 \right] \\
\dfrac{d\lambda_2}{dt} = \dfrac{1}{2} \left[q\,\lambda_0 - (r+\dot{V})\,\lambda_1 + p\,\lambda_3 \right] \\
\dfrac{d\lambda_3}{dt} = \dfrac{1}{2} \left[(r-\dot{V})\,\lambda_0 + q\,\lambda_1 - p\,\lambda_2 \right] \\
\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{R_0 \sqrt{g_0}}{a^{3/2}(1-e^2)^{3/2}} (1+e\cos V)^2 \\
\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1
\end{cases}
$$

La résolution de ce système est faite avec une méthode de Runge Kutta du 4e ordre. (Voir programme en Annexe 3).

Ce programme est testé sur orbite circulaire avec des mouvements de faible amplitude. Nous avons en effet déjà obtenu ces résultats de façon analytique.

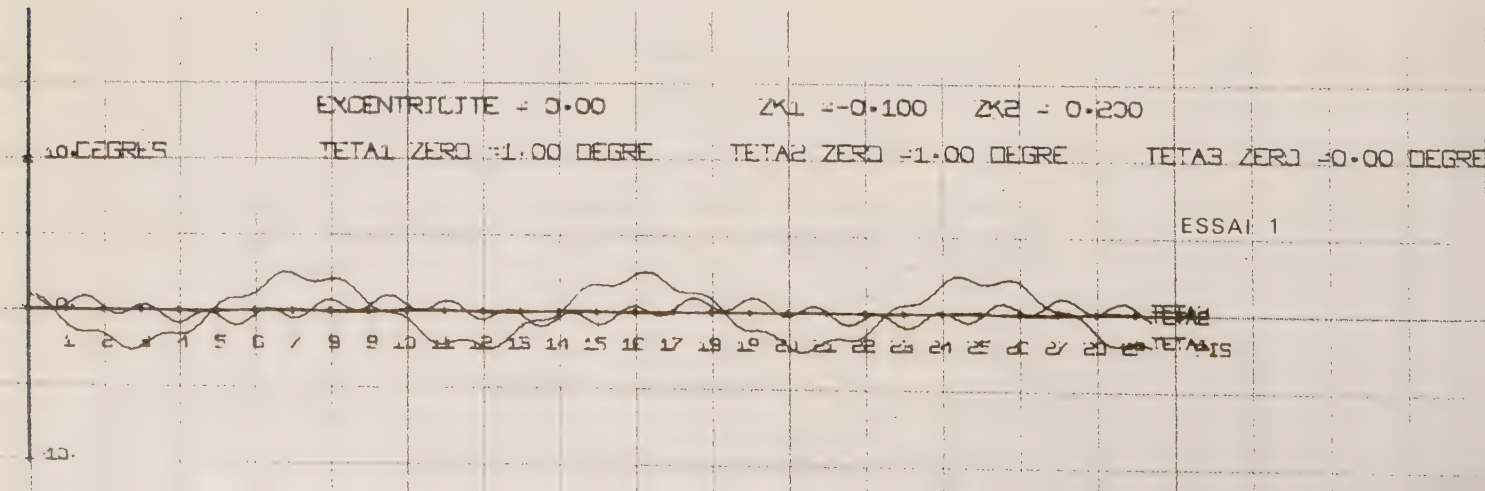
III.2 Excentricité nulle.

Nous choisissons les conditions initiales suivantes :

$$\text{Lacet} \begin{cases} \Theta_{10} = 1° \\ \dot{\Theta}_{10} = 0 \end{cases} \qquad \text{Roulis} \begin{cases} \Theta_{20} = 1° \\ \dot{\Theta}_{20} = 0 \end{cases} \qquad \text{Tangage} \begin{cases} \Theta_{30} = 0° \\ \dot{\Theta}_{30} = 0 \end{cases}$$

En cas d'instabilité, ces valeurs initiales du roulis et lacet sont suffisantes pour faire basculer le corps en une dizaine de révolutions. Il n'est pas nécessaire d'agir initialement sur le tangage qui sera le moins sollicité en cas d'orbite circulaire et le plus sollicité en cas d'orbite elliptique. Nous conserverons ces données dans le cas d'orbites excentriques.

On retrouve bien dans la région de "Delp" sensiblement la même courbe que celle obtenue figure 6. Elle présente néanmoins une légère déformation dans la partie la plus à gauche pour des valeurs de ZK1 variant de 0,15 à 0,30. Ceci est dû en fait à la présence d'une résonance pour $\omega_3 = 2\omega_1$. Cette courbe de résonance apparait de façon très précise dans la résolution numérique. On peut la mettre en place avec une précision supérieure à 1 % dans le plan K_1K_2. De même, la ligne séparant la zone instable nette de la zone dite "stable" après une évolution du phénomène sur 12 révolutions est très pointilleuse. Dans la zone de Lagrange, il n'y a rien de particulier. Les oscillations de tangage restent très faibles. Par contre, celles en roulis et en lacet prennent parfois une certaine importance due encore ici à la courbe de résonance $\omega_3 = 2\omega_1$. L'amplitude de ces mouvements reste cependant dans des limites très acceptables. Il est à noter que le mouvement de lacet a pratiquement toujours une amplitude double de celle de roulis. (Voir figures 9 et 10). Dans le graphique figure 9, on retrouve également de façon très précise la courbe de résonance $\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$.
L'amplitude maximum des mouvements est placée sur chaque graphique au regard du point correspondant à l'essai.
3 types de solution sont représentés ci-dessous et page 75.



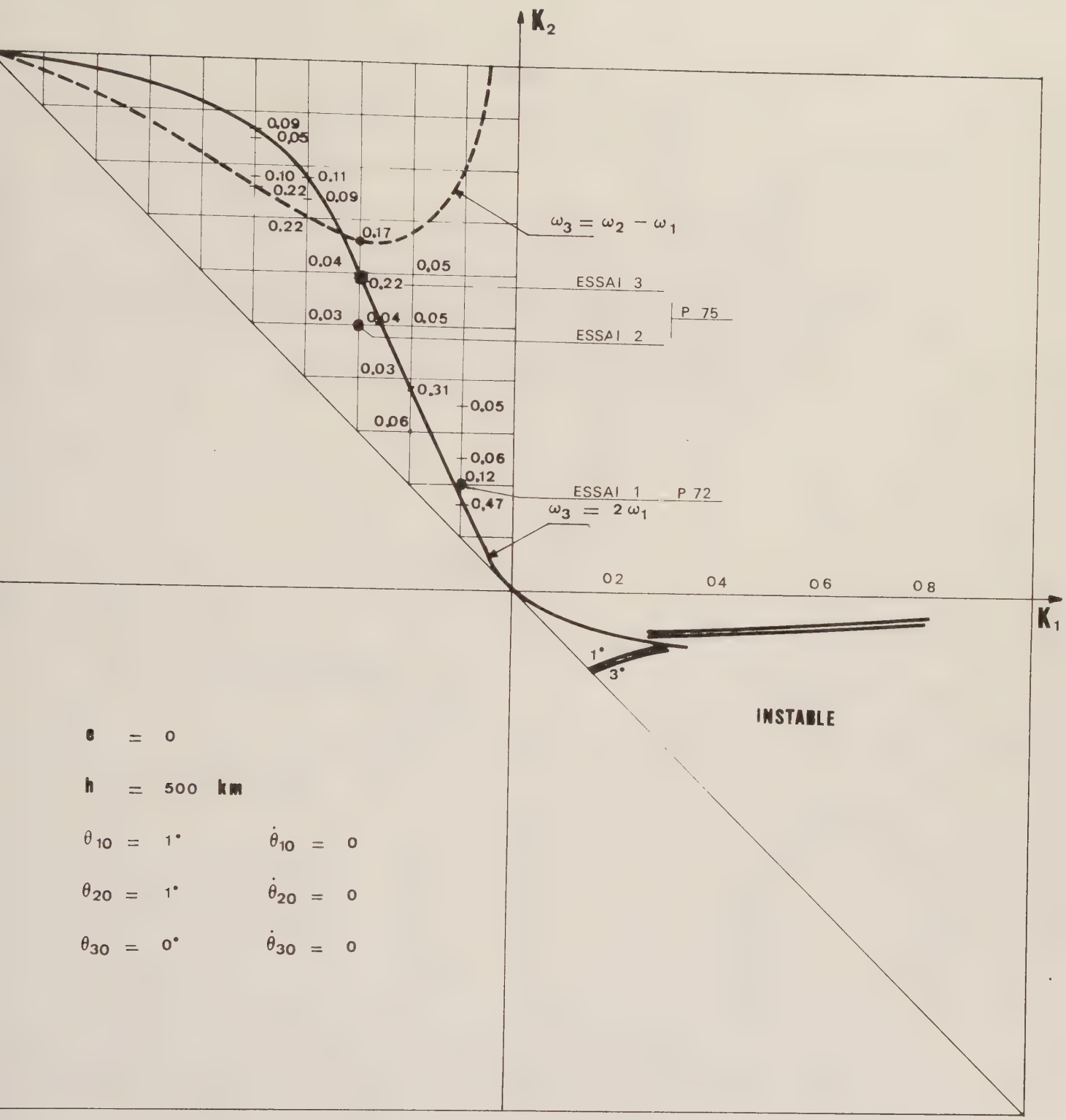

TANGAGE MAXIMUM θ_3 (degrés)
K_2
K_1
0.09
0.05
0.10
0.11
0.22
0.09
0.22
0.17
0.04
0.05
0.22
0.03
0.04
0.05
0.03
0.31
0.05
0.06
0.06
0.12
0.47
$\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$
ESSAI 3
P 75
ESSAI 2
ESSAI 1
P 72
$\omega_3 = 2\omega_1$
02
04
06
08
1°
3°
INSTABLE
e = 0
h = 500 km
θ_{10} = 1° $\dot{\theta}_{10}$ = 0
θ_{20} = 1° $\dot{\theta}_{20}$ = 0
θ_{30} = 0° $\dot{\theta}_{30}$ = 0

Figure 9

LACET MAXIMUM θ_1 (degrés)

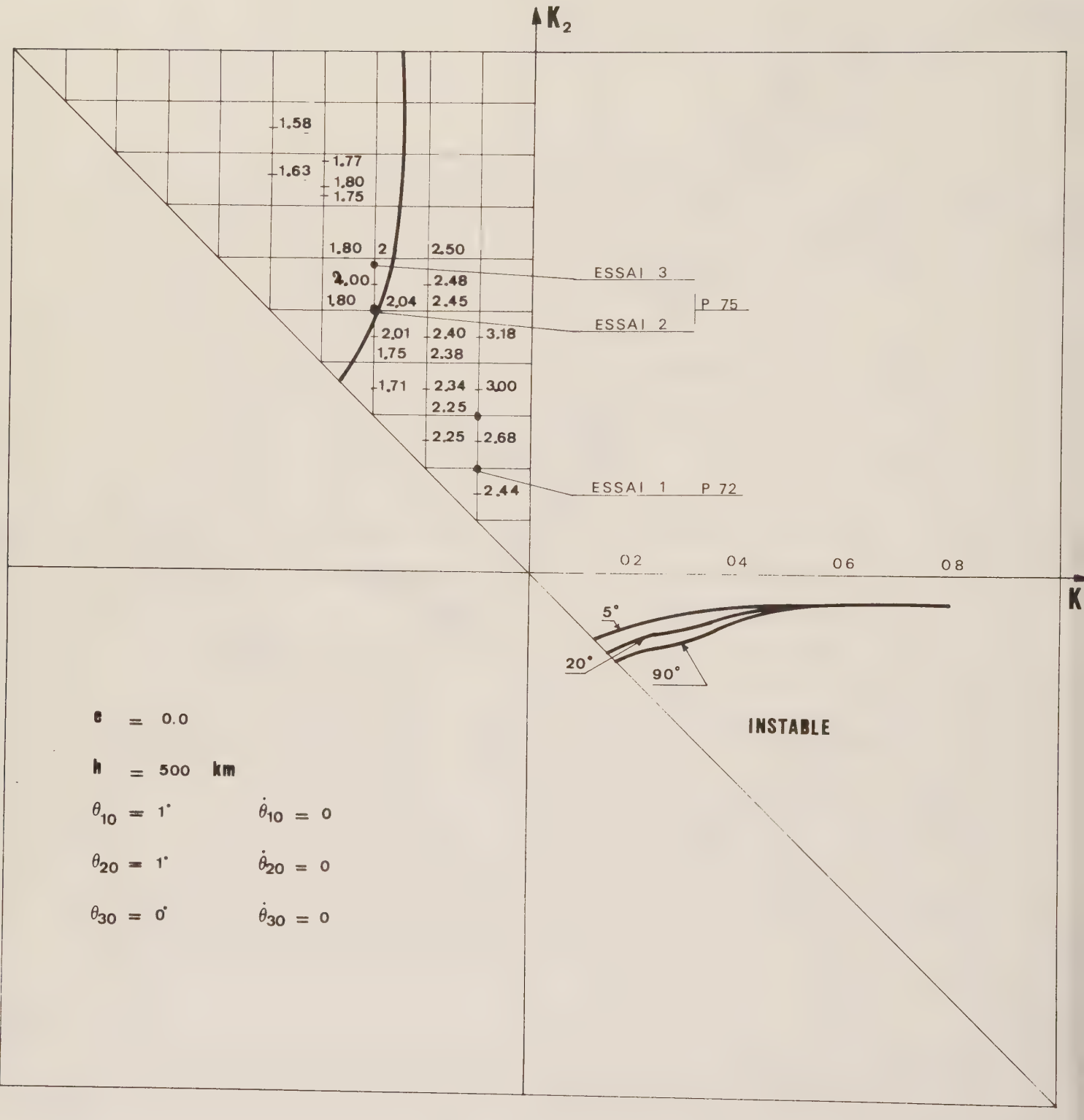


Figure 10

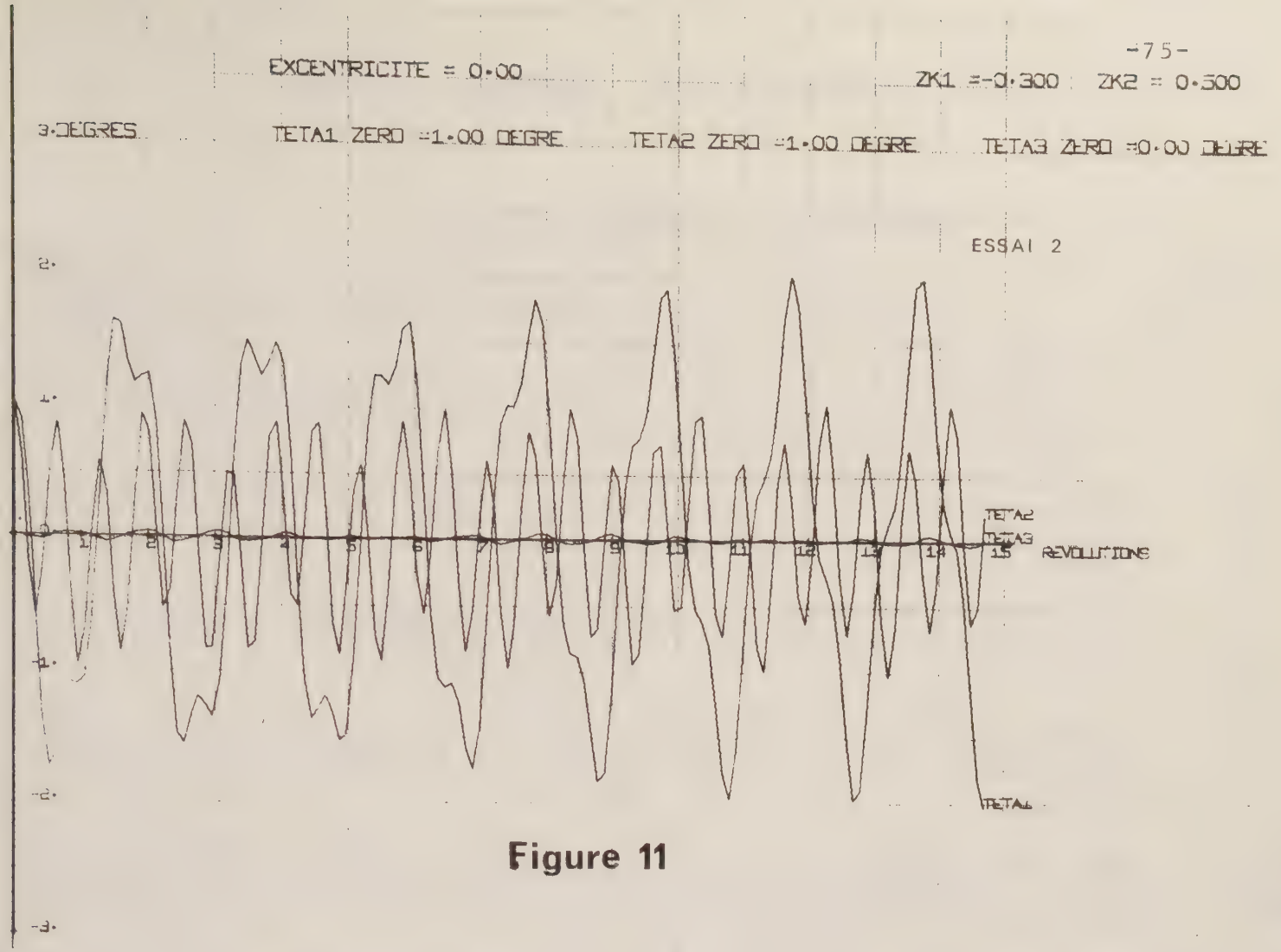

EXCENTRICITE = 0.00
ZK1 =-0.300 ZK2 = 0.500
3.DEGRES
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 ZERO =1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00 DEGRE
ESSAI 2
2.
1.
-1.
-2.
-3.
TETA2
TETA3
REVOLUTIONS
TETA1

Figure 11

EXCENTRICITE = 0.00
ZK1 =-0.300 ZK2 = 0.590
3.DEGRES
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 ZERO =1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00 DEGRE
ESSAI 3
2.
1.
-1.
-2.
-3.
TETA2
TETA 3
REVOLUTIONS
TETA1

III.3 Excentricité différente de zéro.

II.3.1 Excentricité égale à 0.03.

L'excentricité intervient directement en diminuant de façon conséquente la zone de Delp.

Ce résultat est tout à fait normal puisque cette zone était due à un effet gyroscopique provenant de la rotation sur l'orbite; or, cette rotation est maintenant perturbée.

Dans la région de Lagrange nous voyons apparaître sur la figure 12 p.77 une zone instable due à l'excitation externe. Cela confirme la courbe de résonance placée sur la figure 7 et obtenue grâce à la solution de l'équation II.4.10.

Nous trouvons également, mais de façon très pointue, une autre zone de résonance correspondant à la fréquence moitié de la solution obtenue en II.4.10.

Par contre, les deux zones $\omega_3 = 2\omega_1$ et $\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$ ont pratiquement disparu de la figure 12. Ces mouvements doivent être du second ordre par rapport à l'excitation due à l'excentricité de l'orbite.

En lacet, sur la figure 13 p.78, la zone instable est nettement plus étendue que celle correspondant au roulis figure 14. En réalité, les deux mouvements sont liés et l'amplitude du roulis est encore ici moins importante que l'autre.

Nous voyons également, sur les figures 13 et 14, une courbe de résonance $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0$ qui, comme prévu, agit beaucoup plus sur le lacet que le roulis.

Si nous supposons qu'initialement $\theta_{10} = 0°$ et $\theta_{20} = 0°$, le mobile oscille uniquement en tangage. fig.15 p.80.

Nous remarquons, en comparant les figures 12 et 15, que les mouvements de roulis et lacet ne perturbent le tangage que dans la zone de résonance. Les oscillations en θ_3 ne semblent être fonction que de K_3 dans ce cas. On étudiera par la suite le mouvement de tangage seul. (Chapitre IV).

L'interaction du roulis et lacet sur le tangage a tendance à élargir la zone de résonance vers le bas, mais la limite supérieure ne change pas.

Diverses formes de solution correspondant à cette excentricité sont représentées :

$K_1 = -0,1$ $K_2 = 0,2$ fig. 19 essai 2 et fig. 22 essai 1

$K_1 = -0,1$ $K_2 = 0,3$ fig. 22 essai 2

$K_1 = -0,1$ $K_2 = 0,4$ fig. 23 essai 1

$K_1 = -0,1$ $K_2 = 0,5$ fig. 23 essai 2

$K_1 = -0,1$ $K_2 = 0,6$ fig. 20 essai 2

TANGAGE MAXIMUM θ_3 (degrés)

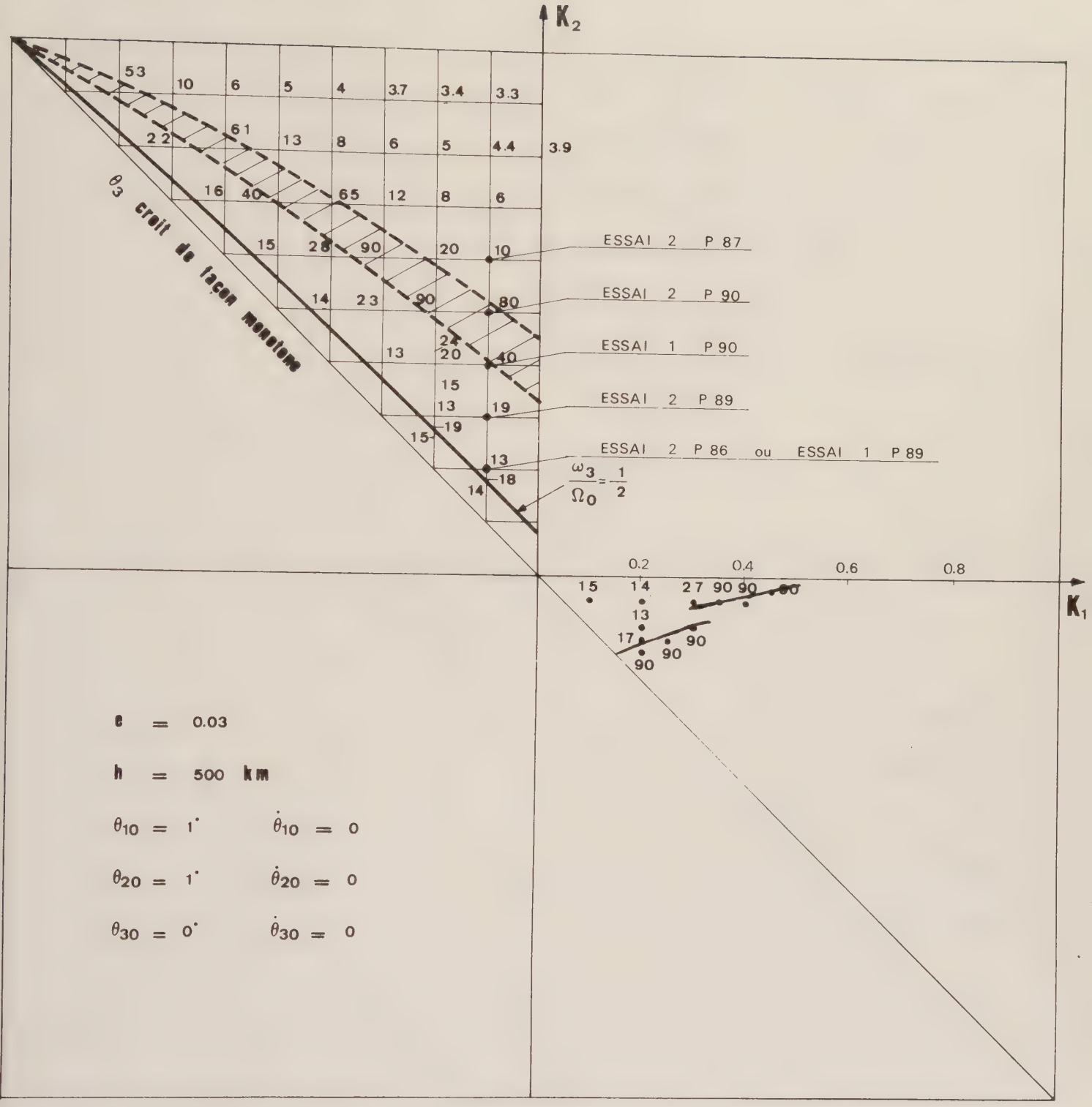


Figure 12

LACET MAXIMUM θ_1 (degrés)

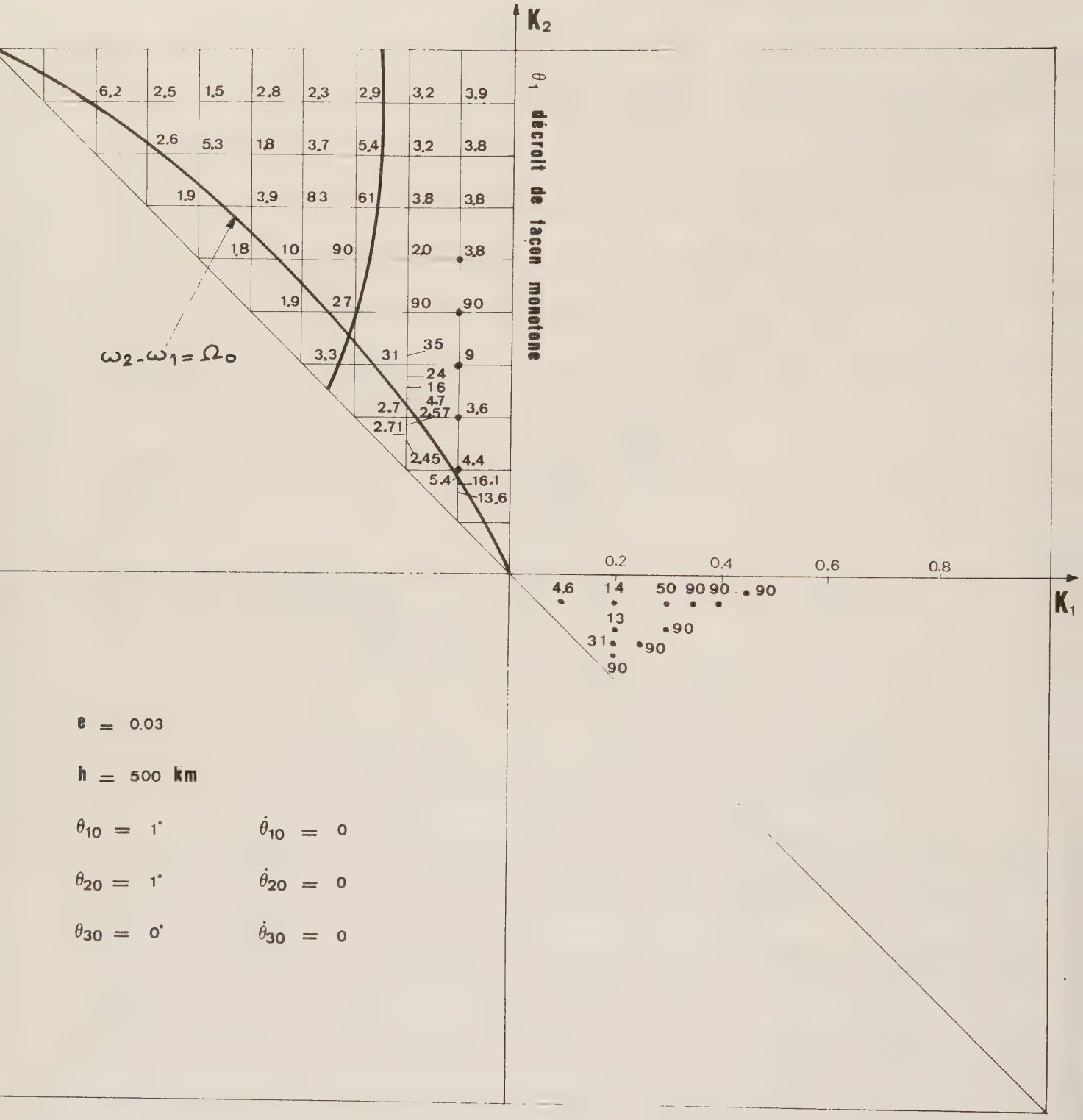


Figure 13

ROULIS MAXIMUM θ_2 (degrés)

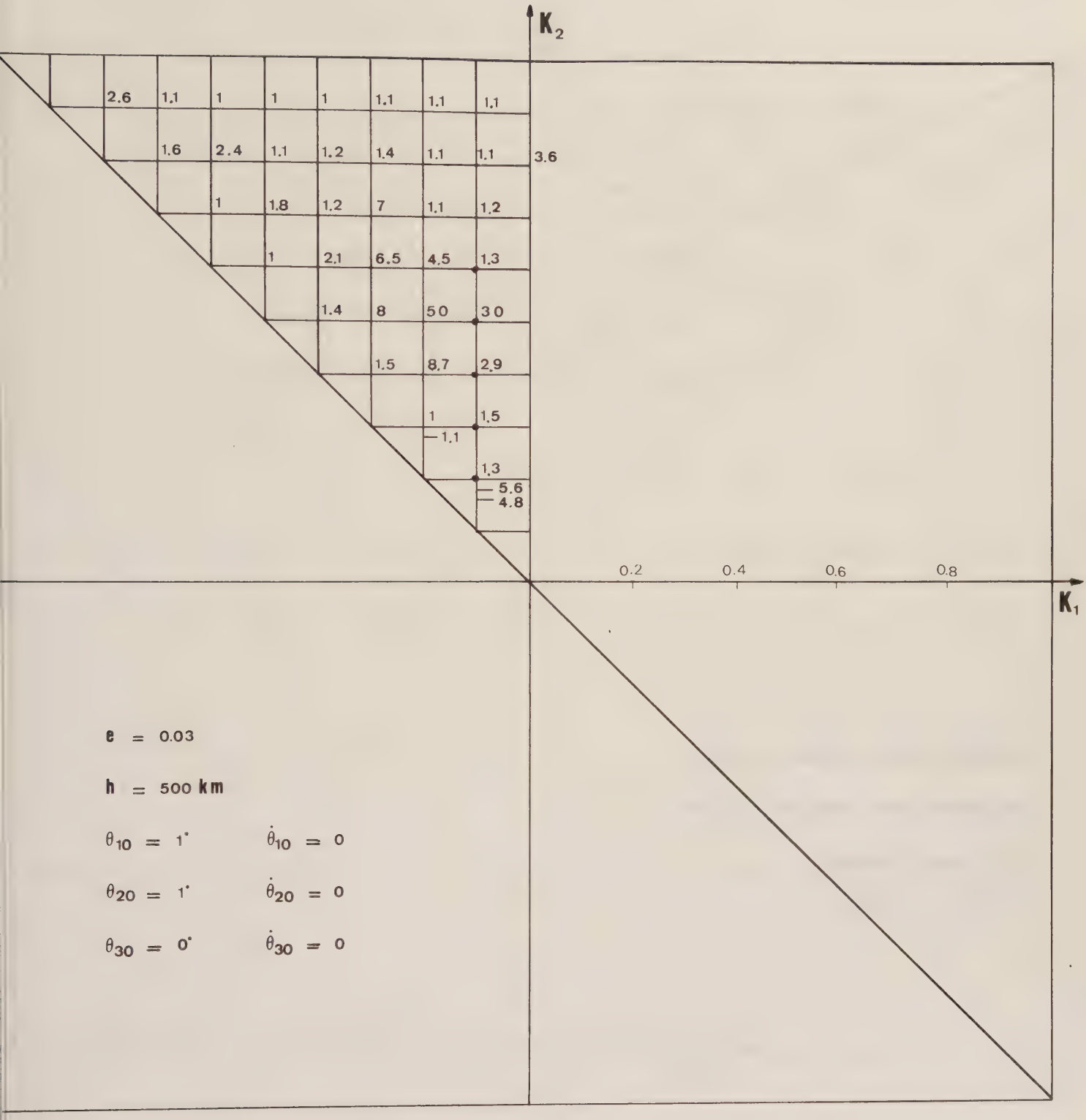


Figure 14

TANGAGE MAXIMUM θ_3 (degrés)

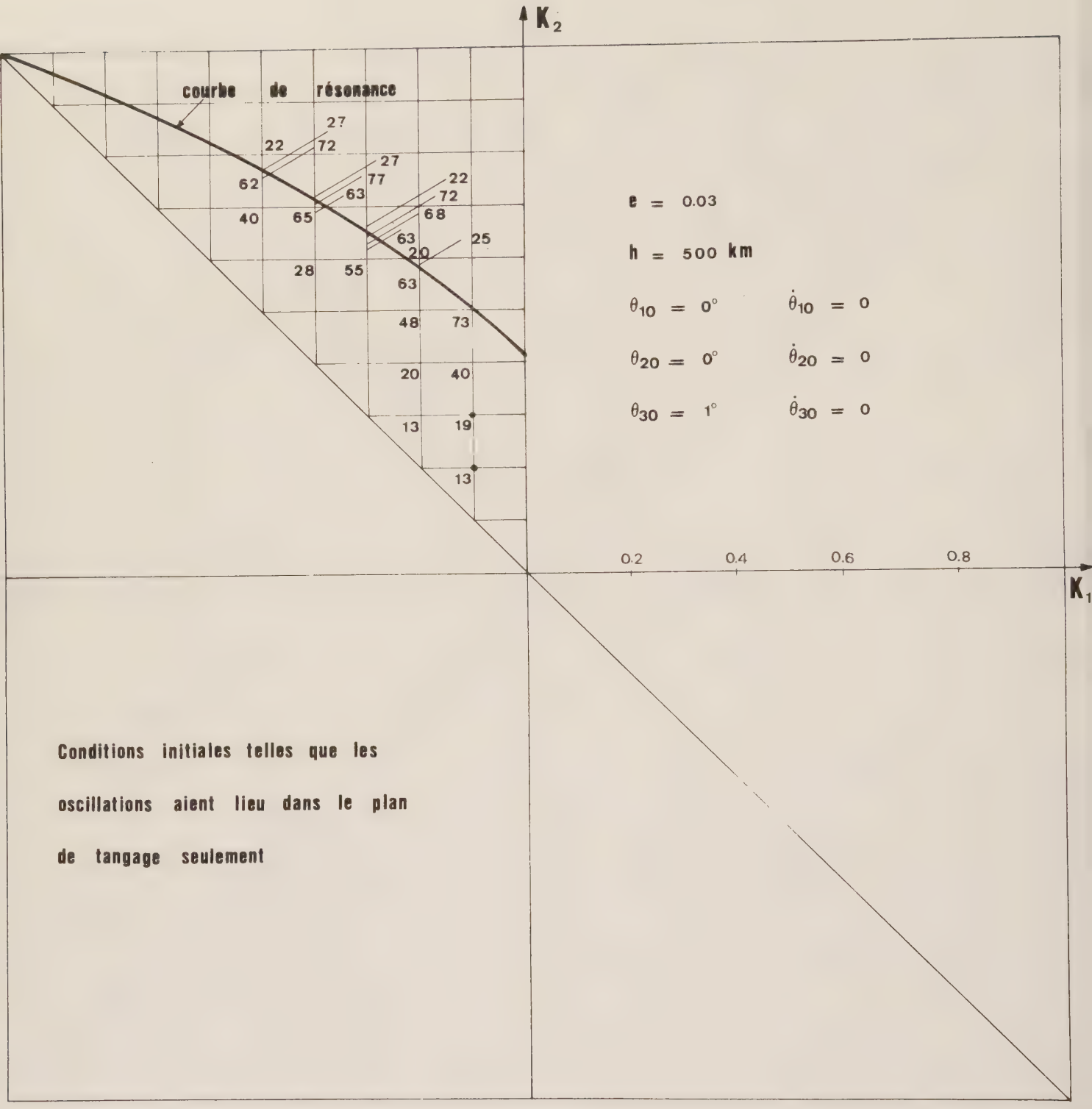


Figure 15

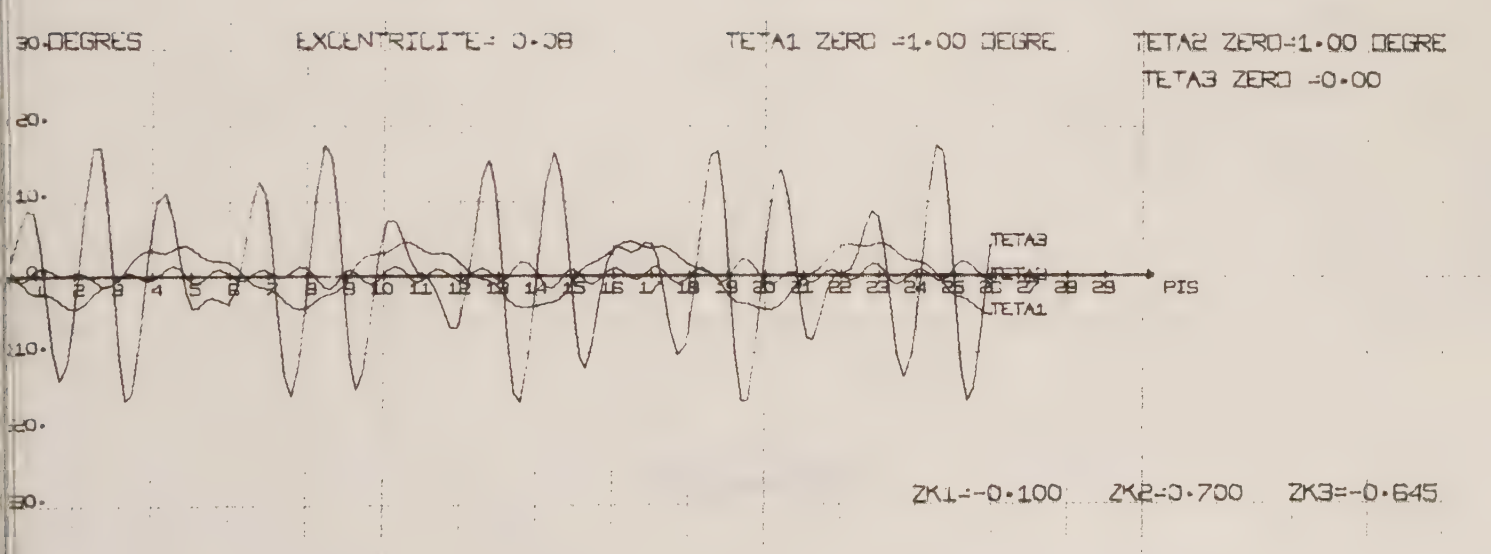
III.3.2. Excentricité égale à 0,08.

Les figures 16-17-18 nous montrent une zone de Delp encore diminuée. La zone de résonance de l'oscillation forcée s'est considérablement agrandie. L'excentricité semble d'ailleurs intervenir de façon plus importante sur le lacet et le roulis. A quelques exceptions près, ces mouvements ne sont plus stables.

Il n'est plus question ici non plus de détecter les effets de résonance dite "interne" $f(\omega_3,\omega_1,\omega_2) = 0$ des résonances "externes" $f(\omega_3,\omega_1,\omega_2,\Omega_0) = 0$, ces dernières ayant beaucoup plus d'importance.

Nous avons voulu donner quelques représentations des solutions avec une telle excentricité

$e = 0.08$	$ZK_1 = -0.10$	$ZK_2 = 0.70$	ci-dessous
$e = 0.08$	$ZK_1 = -0.10$	$ZK_2 = 0.20$	essai 4 figure 19
$e = 0.08$	$ZK_1 = -0.10$	$ZK_2 = 0.60$	essai 4 figure 20



TANGAGE MAXIMUM θ_3 (degrés)

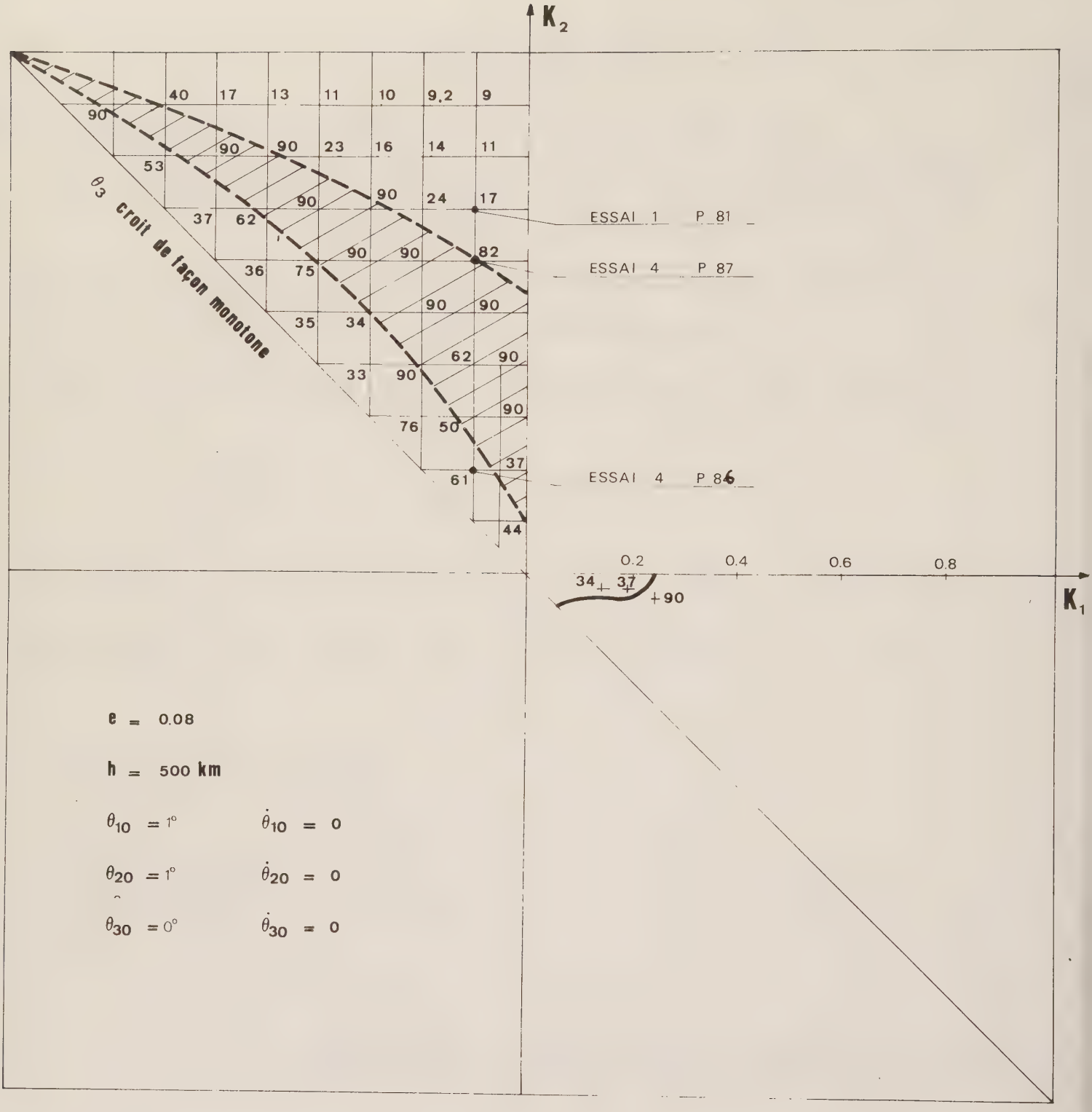


Figure 16

LACET MAXIMUM θ_1 (degrés)

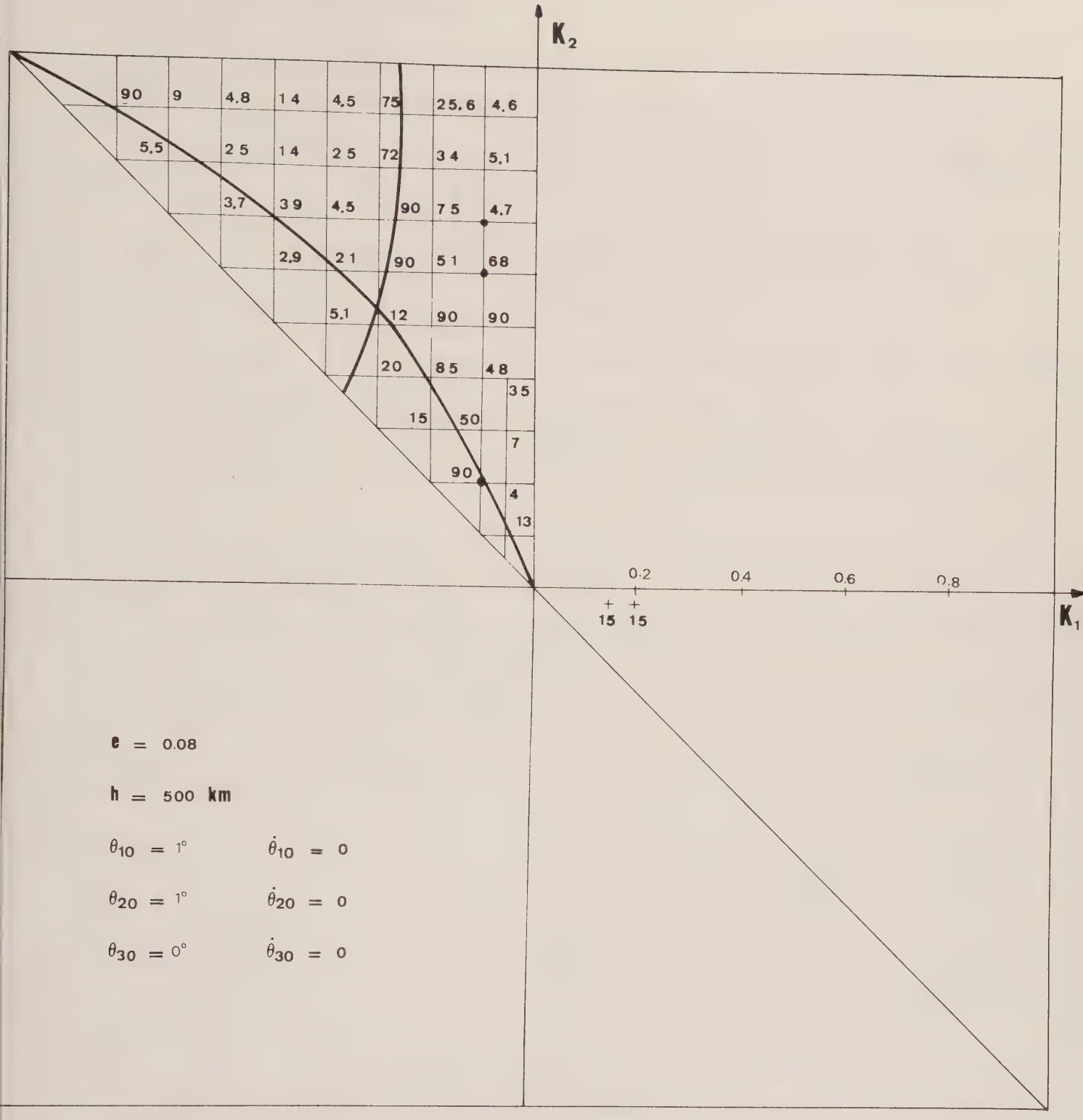


Figure 17

ROULIS MAXIMUM θ_2 (degrés)

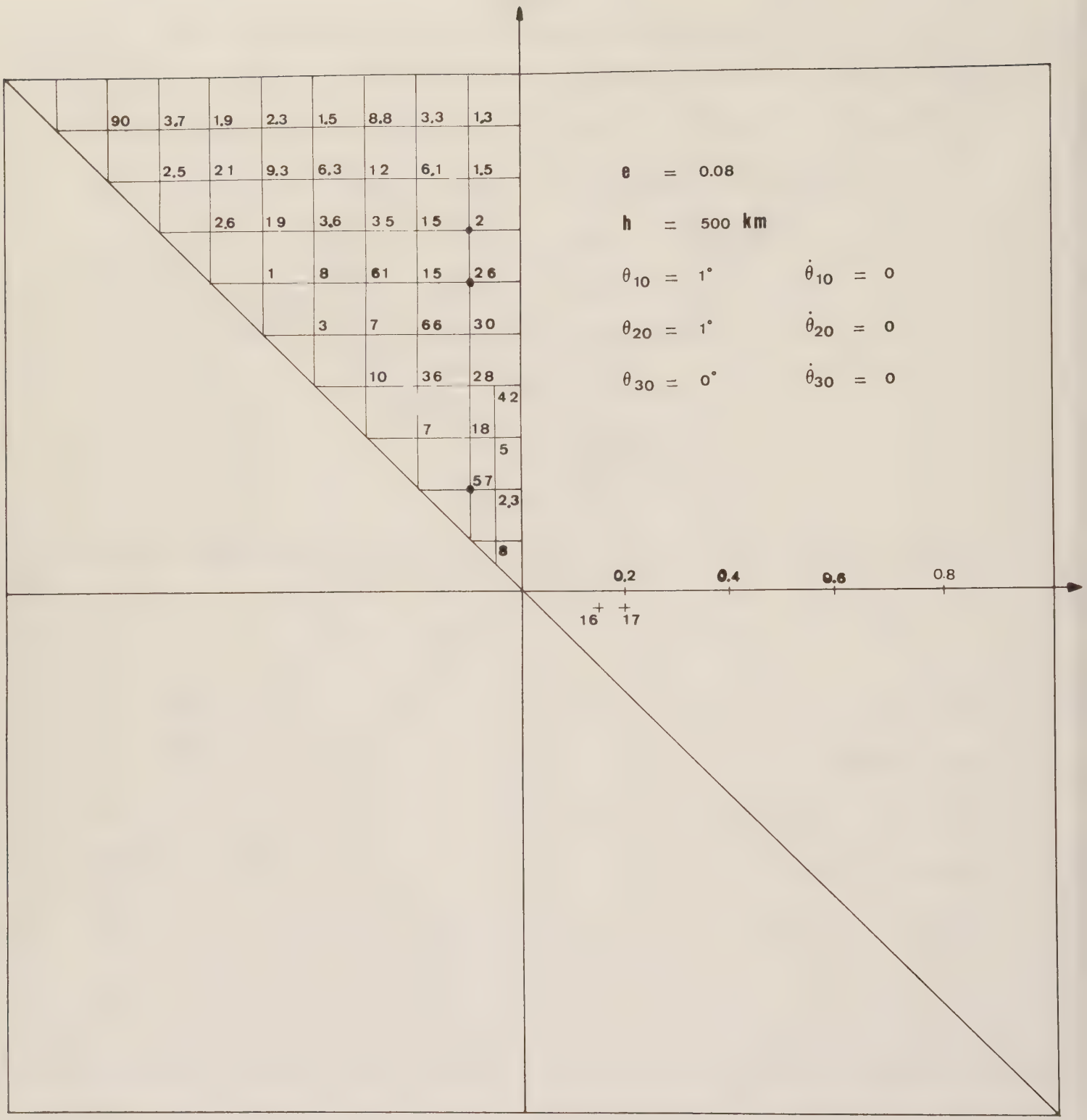


Figure 18

III.4 Conséquences

L'excentricité de l'orbite intervient très sérieusement sur les oscillations de tangage.

En ne considérant que les mouvements en θ_3, nous allons tenter de préciser certains résultats obtenus dans cette étude. Nous allons montrer en particulier pour le tangage, que toute solution devient, au bout d'un certain temps, périodique.

Nous avons vu également que les résonances internes ont une importance beaucoup moins grande que les résonances externes. Seules celles-ci nous intéresseront puisque nous devons étudier les mouvements du satellite sur orbite excentrique.

D'après ce que nous venons de voir, il ne serait pas sérieux de ne considérer que les mouvements de tangage sans tenir compte du roulis et du lacet.

KANE T.R(*)a montré en effet que déjà, sur orbite circulaire (équations linéarisées à coefficients périodiques, utilisation de la méthode de Floquet) l'amplitude plus ou moins importante du tangage réagissait sur la stabilité des équations du lacet et du roulis.

Les conclusions sont incomplètes, en ce sens que, les instabilités déterminées par T.R.KANE correspondent aux résonances "internes" des mouvements.

Nous venons de voir que les effets de l'excentricité sont prépondérants relativement aux interactions des 3 mouvements.

Il serait donc également important dans un autre travail de développer plus précisément les résonances internes pour pouvoir effectuer une comparaison.

Les figures 19, 20 et 21 montrent l'évolution des solutions si l'excentricité croit :

Fig. 19 $\mathbf{Z}K_1 = -0{,}10$ $\mathbf{Z}K_2 = 0{,}200$ (e = 0,01 - e = 0,03 - e = 0,05 - e = 0,08.

Fig. 20 $\mathbf{Z}K_1 = -0{,}10$ $\mathbf{Z}K_2 = 0{,}600$ (e = 0,01 - e = 0,03 - e = 0,05 - e = 0,08.

La figure 21 nous place dans des conditions beaucoup plus favorables. Mais même en se plaçant avec ZK1 # 0 et ZK2 # 1 , on ne peut avoir de mouvement stable si e est supérieur à environ 0,35.

(*) KANE T.R. "Attitude Stability of Earth Pointing Satellites" AIAA Journal Vol.3 n°4. Avril 1965. pp. 726-731.

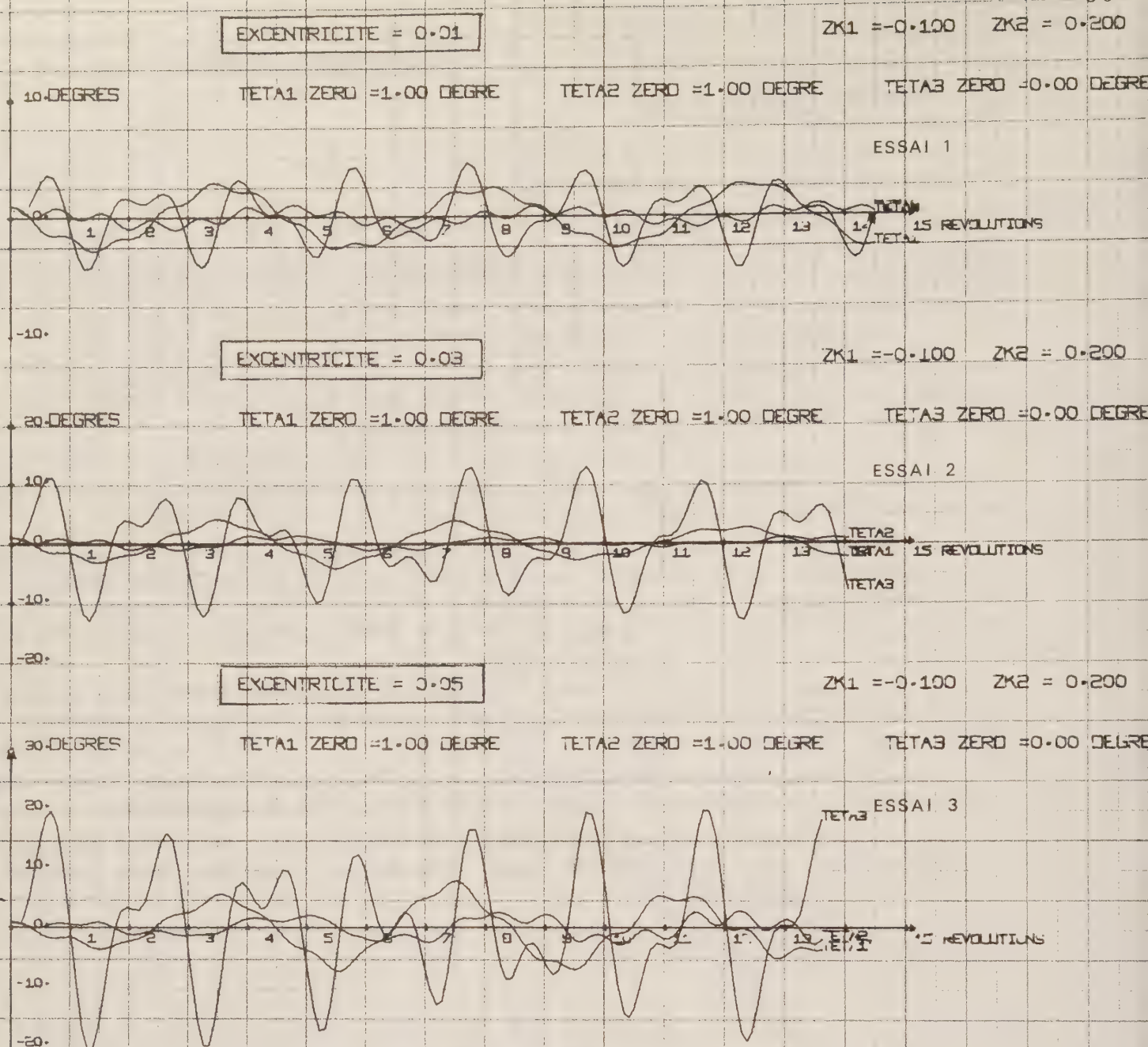
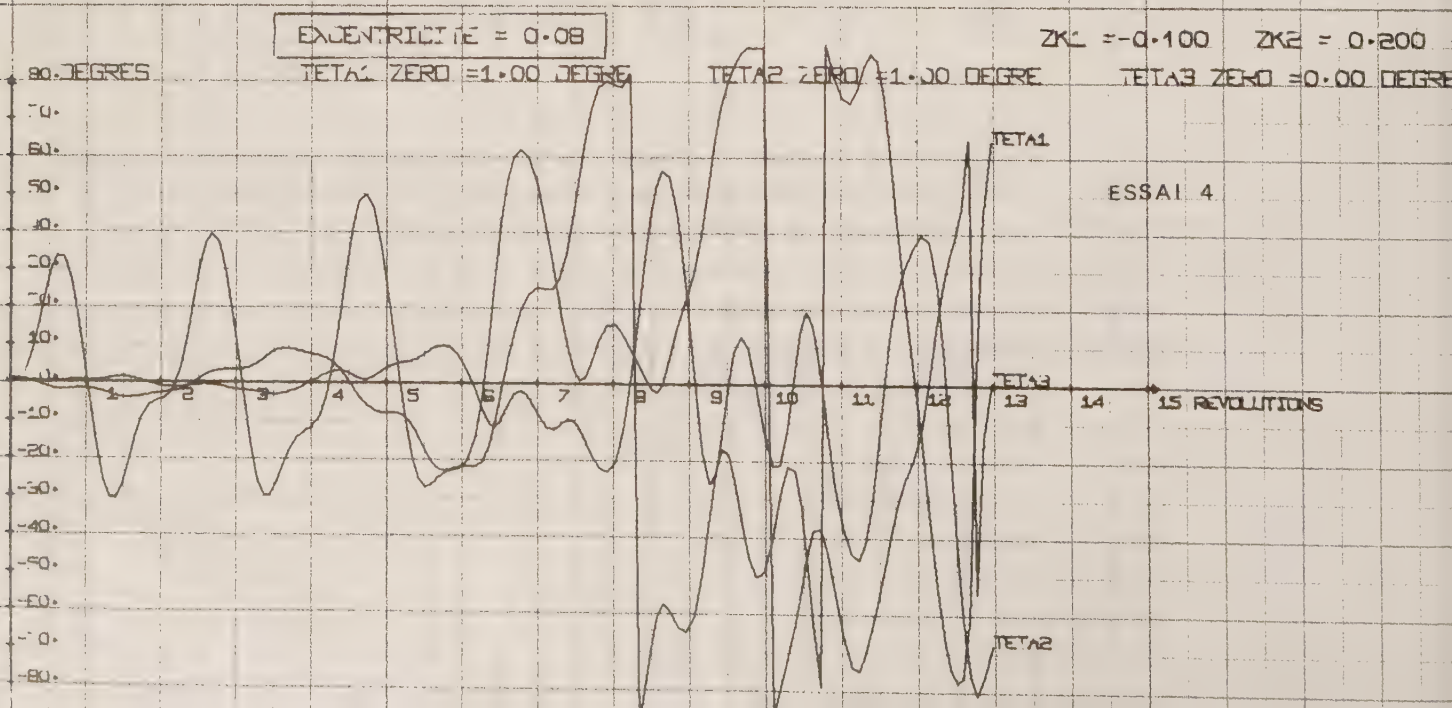

EXCENTRICITE = 0.01
ZK1 =-0.100 ZK2 = 0.200
10.DEGRES
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 ZERO =1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00 DEGRE
ESSAI 1
15 REVOLUTIONS
EXCENTRICITE = 0.03
ZK1 =-0.100 ZK2 = 0.200
20.DEGRES
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 ZERO =1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00 DEGRE
ESSAI 2
TETA2
TETA1
TETA3
15 REVOLUTIONS
EXCENTRICITE = 0.05
ZK1 =-0.100 ZK2 = 0.200
30.DEGRES
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 ZERO =1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00 DEGRE
ESSAI 3
TETA3
15 REVOLUTIONS

Figure 19


EXCENTRICITE = 0.08
ZK1 =-0.100 ZK2 = 0.200
80.DEGRES
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 ZERO =1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00 DEGRE
ESSAI 4
TETA1
TETA3
TETA2
15 REVOLUTIONS

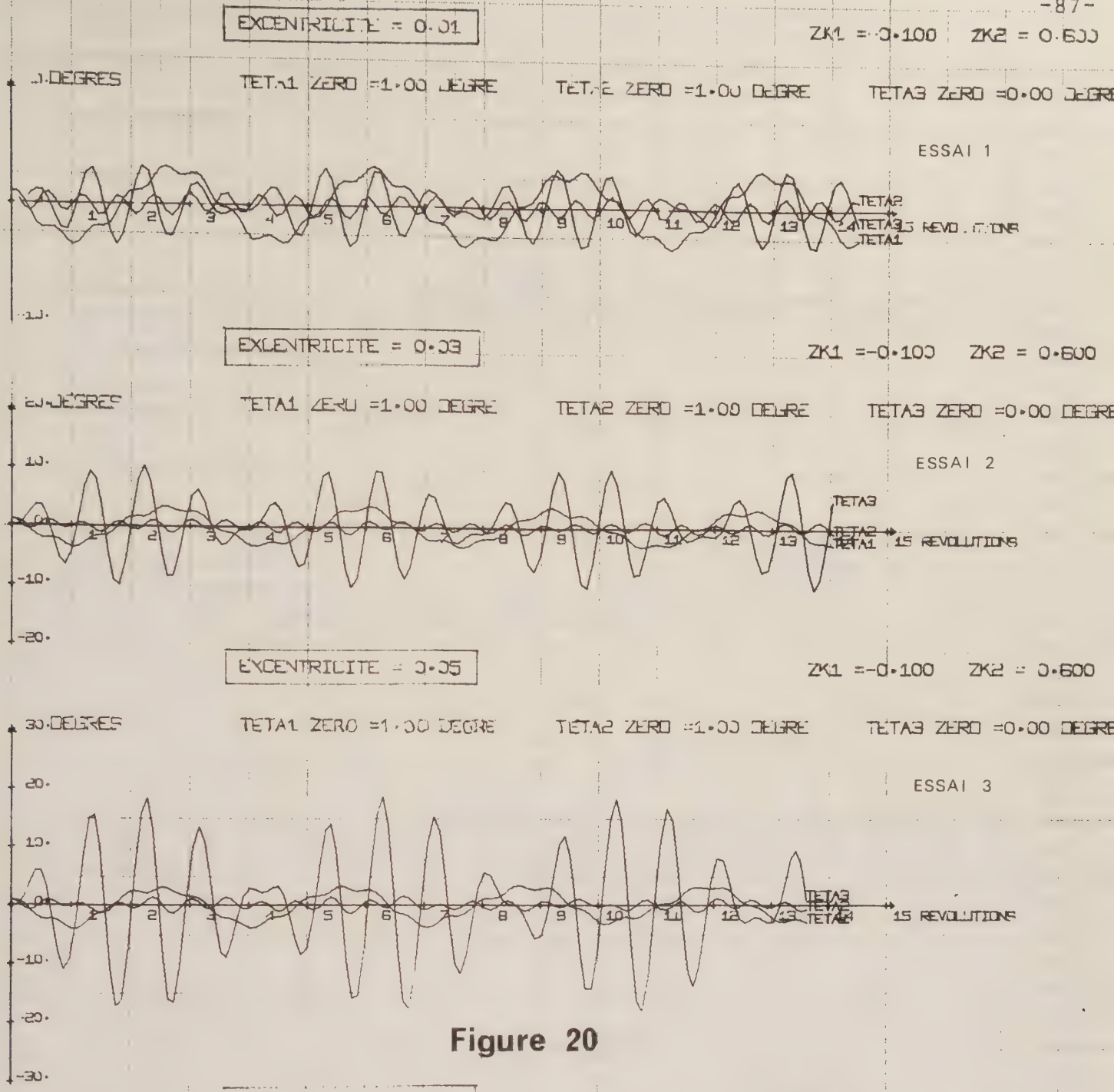
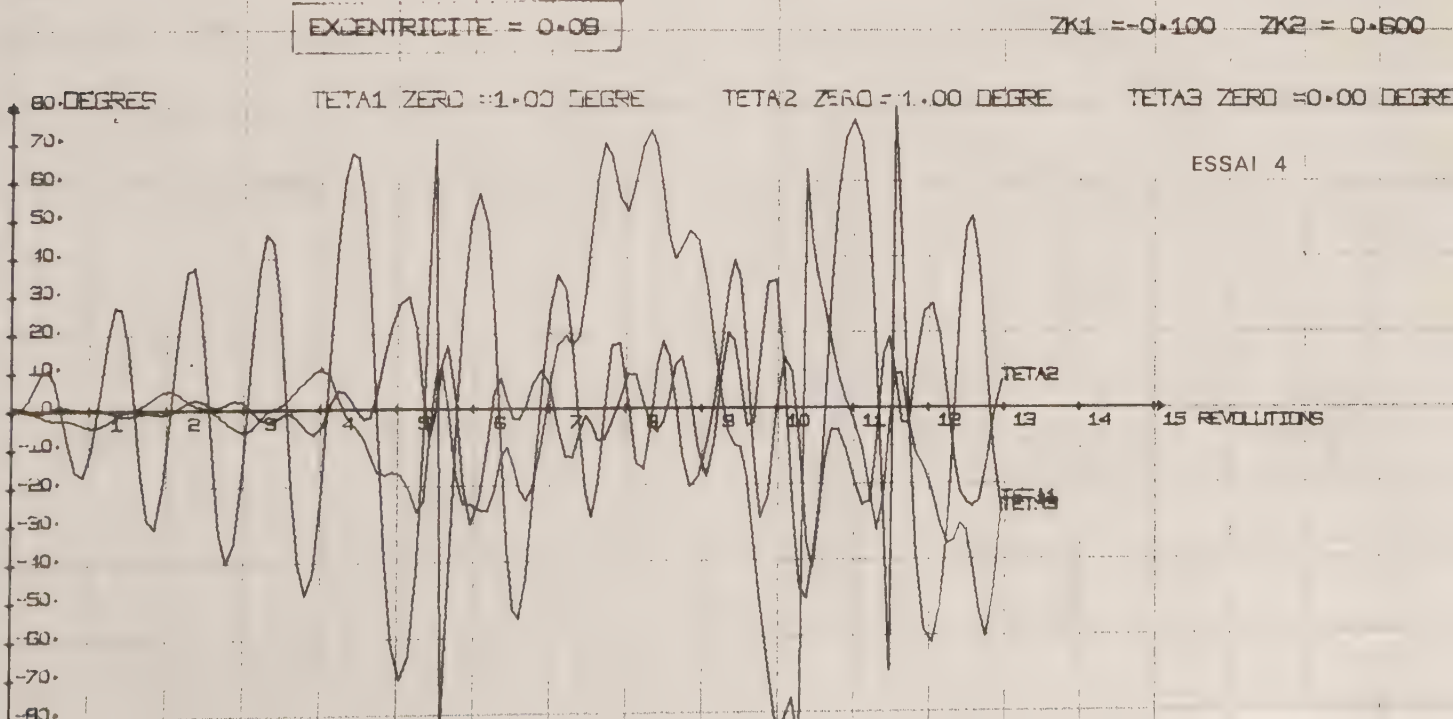

EXCENTRICITE = 0.01
ZK1 = -0.100 ZK2 = 0.600
DEGRES
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 ZERO =1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00 DEGRE
ESSAI 1
TETA2
TETA3
TETA1
15 REVOLUTIONS
EXCENTRICITE = 0.03
ZK1 =-0.100 ZK2 = 0.600
DEGRES
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 ZERO =1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00 DEGRE
ESSAI 2
TETA3
TETA2
TETA1
15 REVOLUTIONS
EXCENTRICITE = 0.05
ZK1 =-0.100 ZK2 = 0.600
DEGRES
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 ZERO =1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00 DEGRE
ESSAI 3
TETA3
TETA2
TETA1
15 REVOLUTIONS

Figure 20


EXCENTRICITE = 0.08
ZK1 =-0.100 ZK2 = 0.600
DEGRES
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 ZERO =1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00 DEGRE
ESSAI 4
TETA2
TETA1
15 REVOLUTIONS

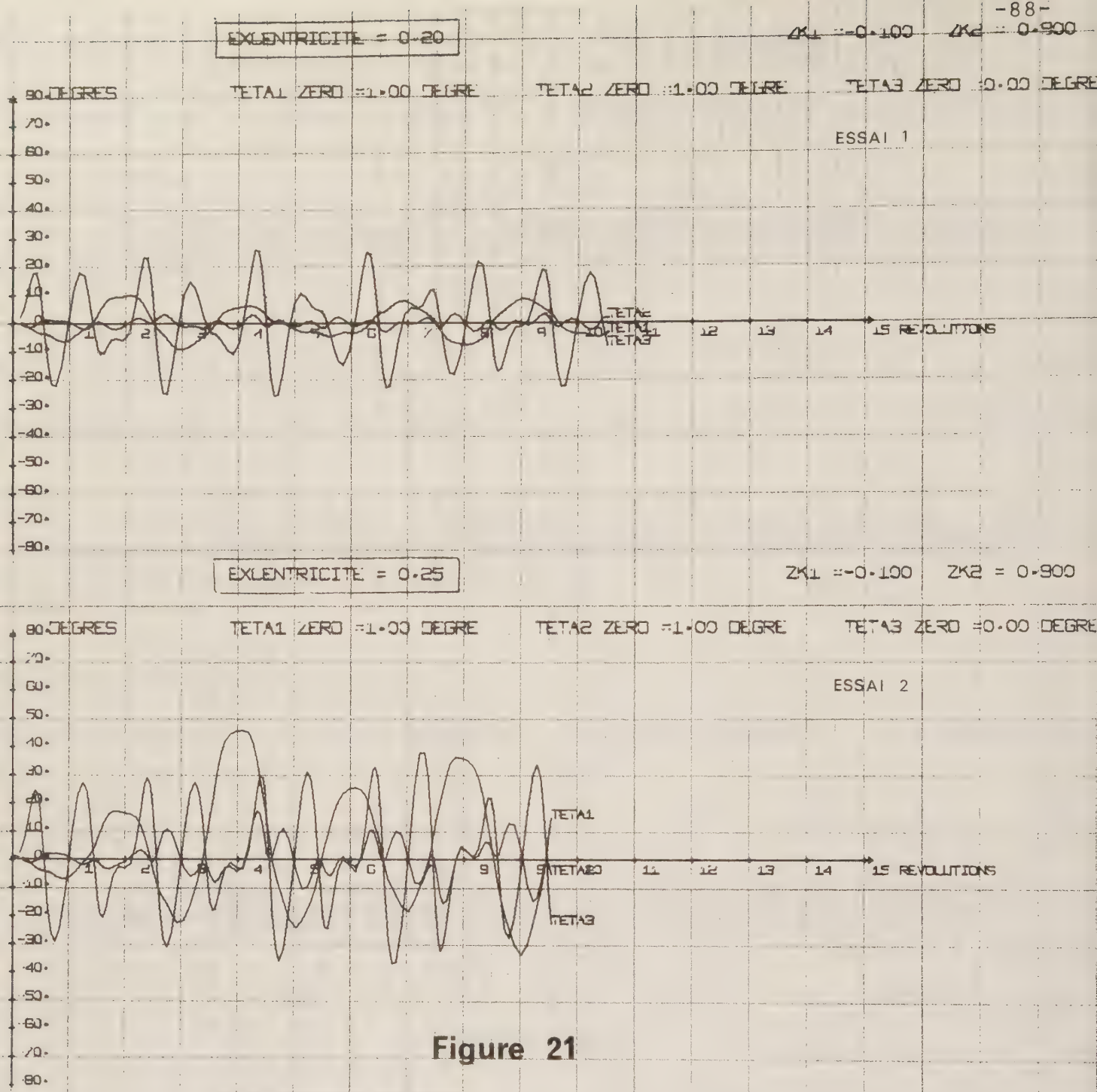
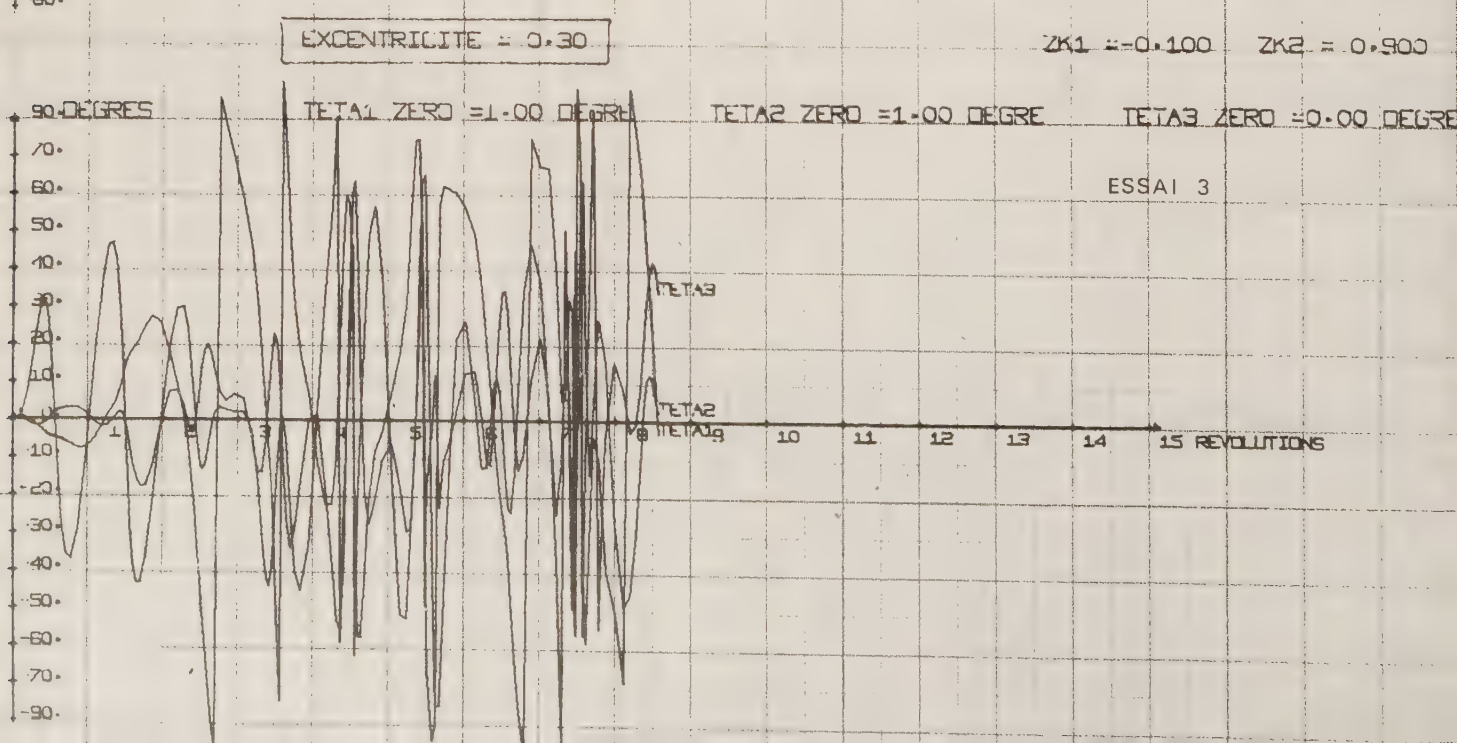

EXCENTRICITE = 0.20
ZK1 =-0.100 ZK2 = 0.900
90 DEGRES
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 ZERO =1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00 DEGRE
ESSAI 1
TETA2
TETA1
TETA3
15 REVOLUTIONS
EXCENTRICITE = 0.25
ZK1 =-0.100 ZK2 = 0.900
90 DEGRES
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 ZERO =1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00 DEGRE
ESSAI 2
TETA1
TETA2
TETA3
15 REVOLUTIONS

Figure 21


EXCENTRICITE = 0.30
ZK1 =-0.100 ZK2 = 0.900
90 DEGRES
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 ZERO =1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00 DEGRE
ESSAI 3
TETA3
TETA2
TETA1
15 REVOLUTIONS

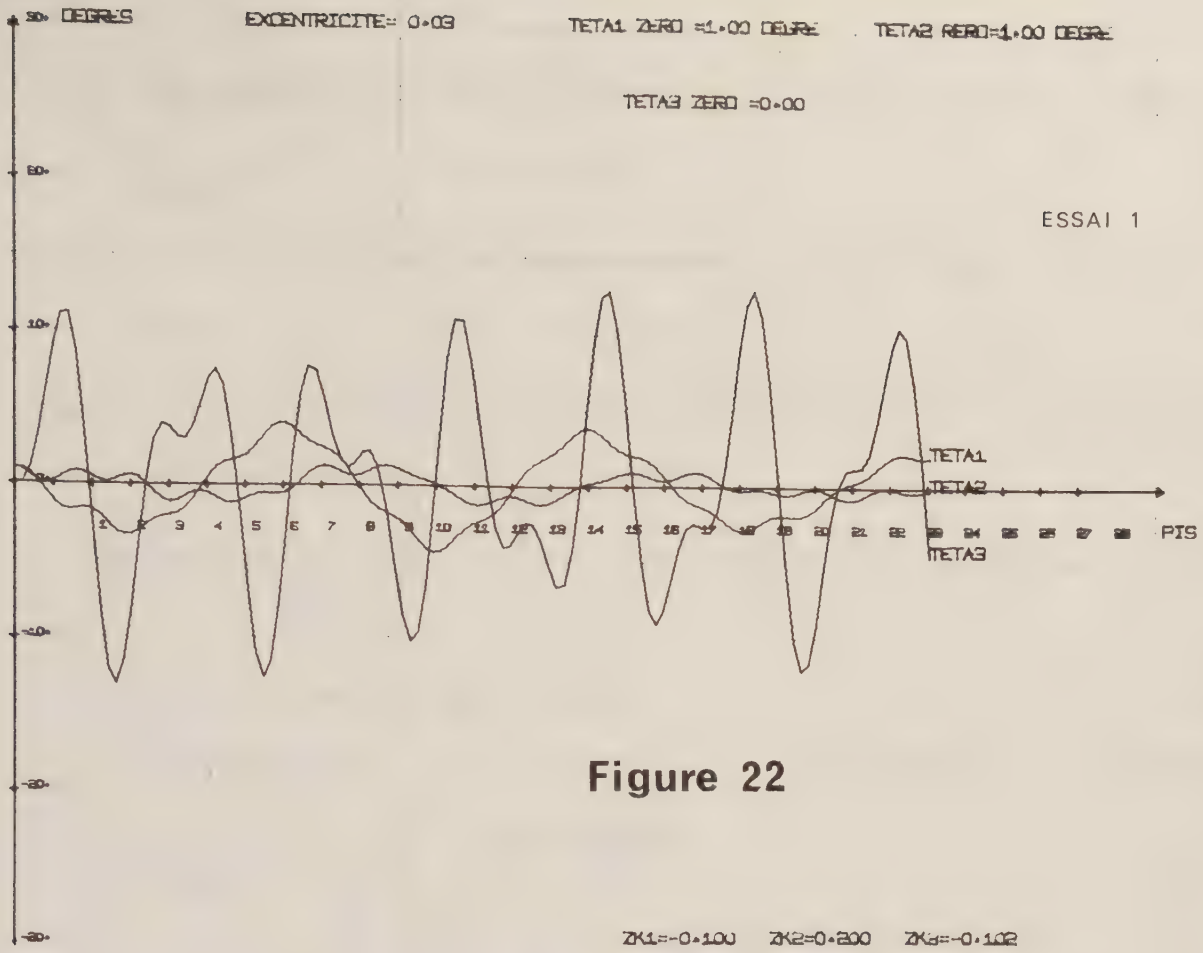
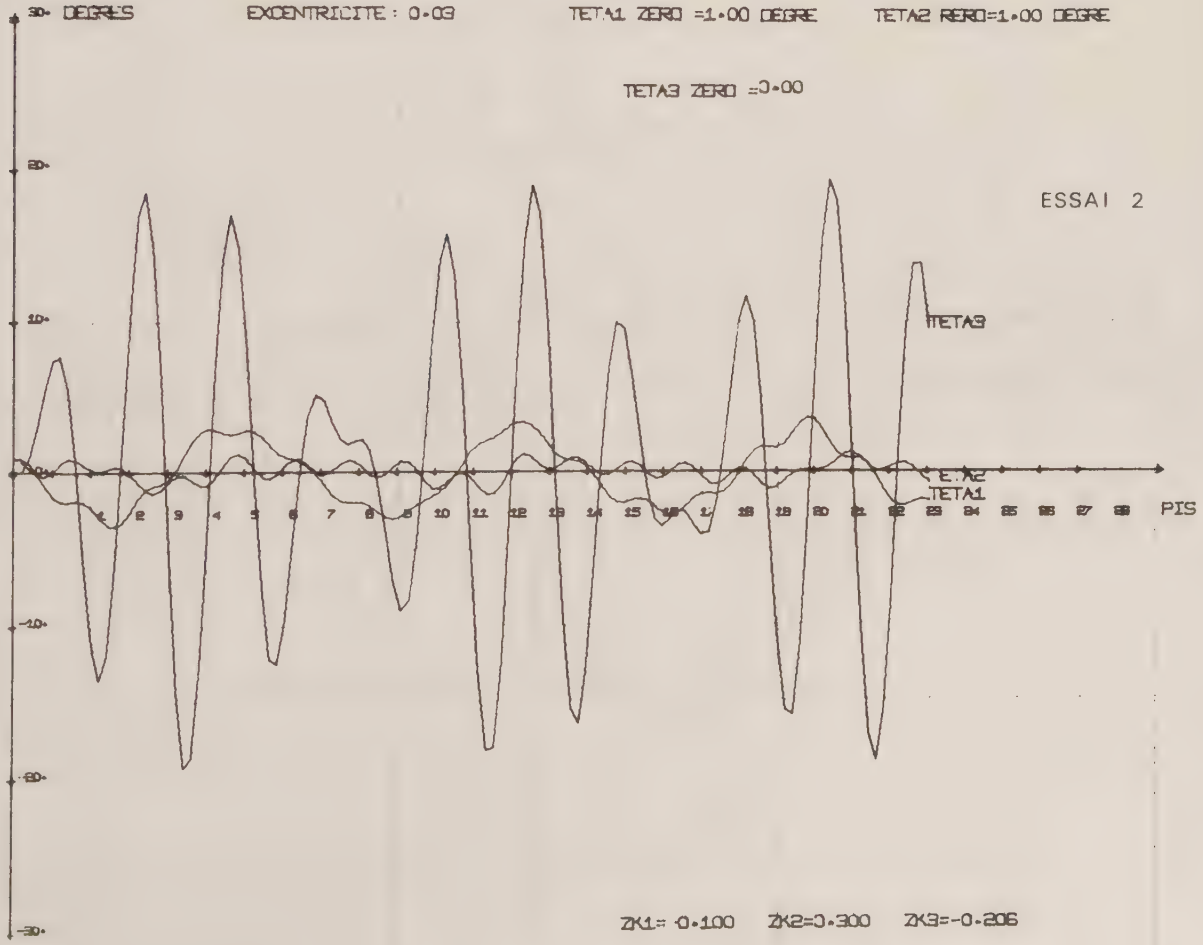
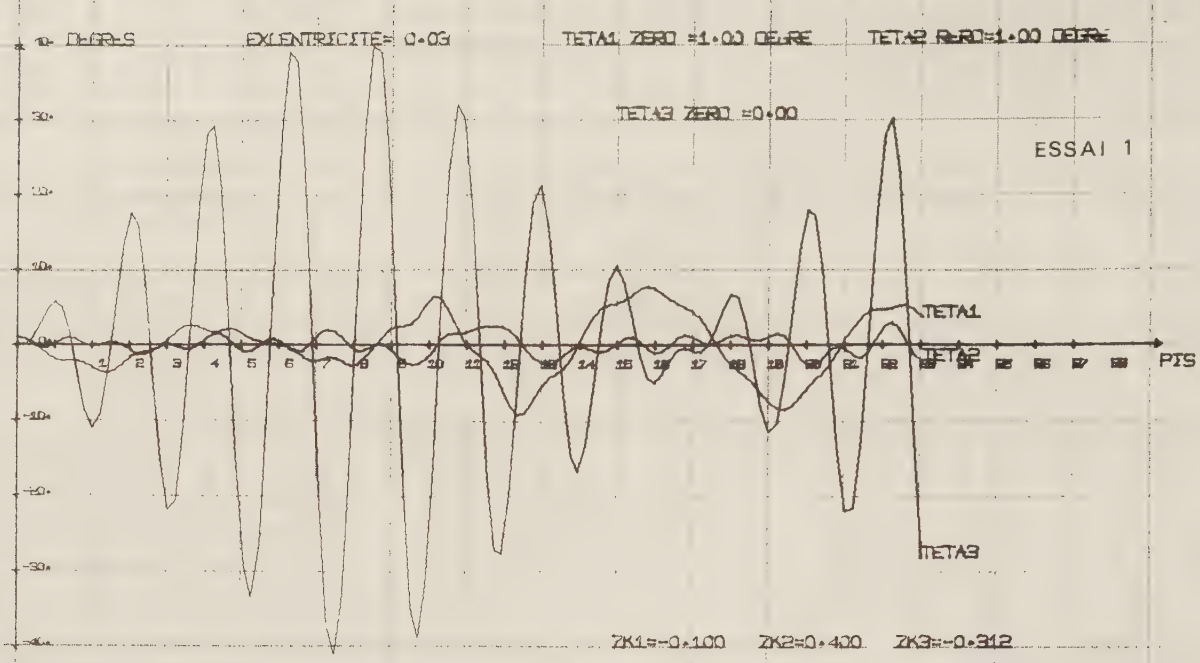

DEGRES
EXCENTRICITE= 0.03
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 RERO=1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00
ESSAI 1
TETA1
TETA2
TETA3
PIS
ZK1=-0.100 ZK2=0.200 ZK3=-0.102

Figure 22


DEGRES
EXCENTRICITE : 0.03
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 RERO=1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00
ESSAI 2
TETA3
TETA1
PIS
ZK1= 0.100 ZK2=0.300 ZK3=-0.206


DEGRES
EXCENTRICITE= 0.03
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 ZERO=1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00
ESSAI 1
TETA1
TETA2
TETA3
PTS
ZK1=-0.100
ZK2=0.400
ZK3=-0.312

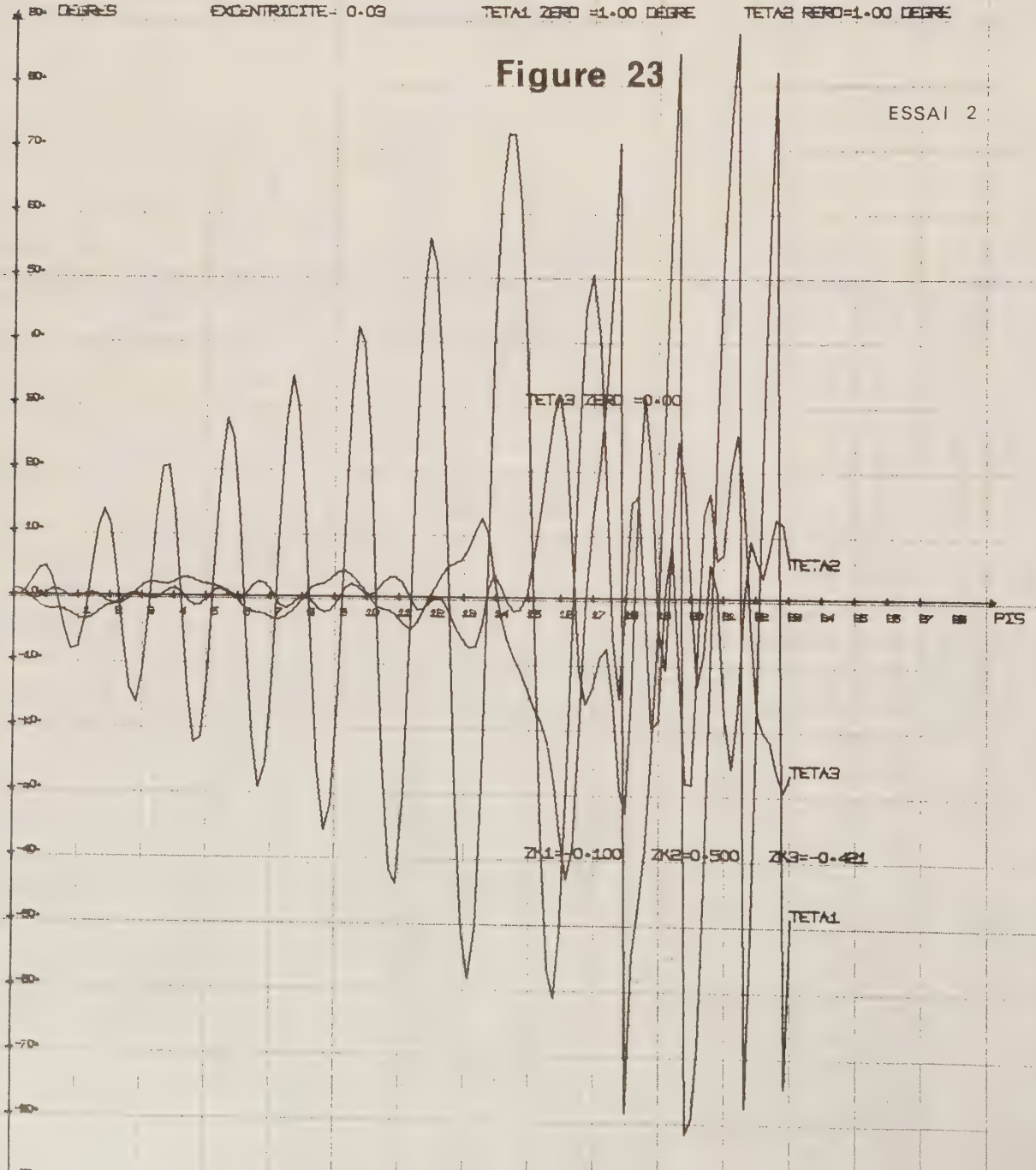
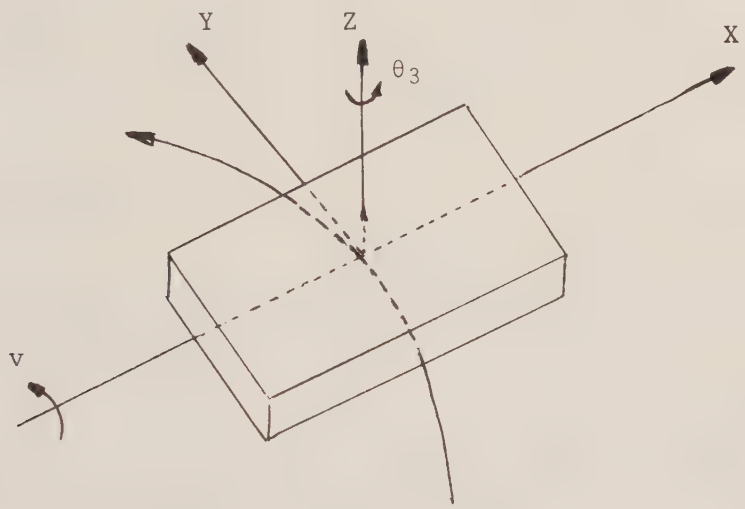

DEGRES
EXCENTRICITE= 0.03
TETA1 ZERO =1.00 DEGRE
TETA2 ZERO=1.00 DEGRE
TETA3 ZERO =0.00
ESSAI 2
TETA2
TETA3
TETA1
PTS
ZK1=-0.100
ZK2=0.500
ZK3=-0.421

Figure 23

IV - GRANDES OSCILLATIONS d'un CORPS de FORME QUELCONQUE dans le PLAN de TANGAGE

IV.1 Equation générale

Supposons que l'un des axes principaux d'inertie reste constamment normal au plan de l'orbite.



$\theta_1 = \theta_2 = 0$

Seul θ_3 varie.

Le couple gravitationnel s'écrit dans les axes liés au corps :

$$\begin{cases} L = 0 \\ M = 0 \\ N = \dfrac{3g_0R_0^2}{R^3}\,(A-B)\sin\theta_3\cos\theta_3 \end{cases}$$

L'équation définissant le mouvement de tangage a alors la forme suivante :

$$\ddot{\theta}_3 + \ddot{V} + \frac{3g_0R_0^2}{R^3}\left(\frac{B-A}{C}\right)\sin\theta_3\cos\theta_3 = 0 \qquad \text{(IV.1.1.)}$$

Or, le satellite parcourt une orbite telle que :

$$\begin{cases} R^2\dot{V} = h \\ R = \dfrac{h^2}{g_0R_0^2(1+e\cos V)} \end{cases}$$

Appelons $K_3 = \frac{A-B}{C}$ et effectuons un changement de variable qui nous permettra d'éliminer le temps dans cette équation et d'avoir un angle de tangage fonction de l'anomalie vraie seulement.

$$\dot{V} = \frac{h}{R^2} = \frac{dV}{dt} \qquad \rightarrow \qquad \frac{d\theta_3}{dt} = \frac{h}{R^2}\frac{d\theta_3}{dV}$$

$$\text{et} \quad \frac{d^2\theta_3}{dt^2} = \frac{d}{dV}\left(\frac{h}{R^2}\frac{d\theta_3}{dV}\right)\frac{h}{R^2} = \frac{h^2}{R^4}\frac{d^2\theta_3}{dV^2} - 2\frac{h^2}{R^5}\frac{d\theta_3}{dV}\frac{dR}{dV}$$

$$\frac{dR}{dV} = \frac{h^2}{g_0 R_0^2}\cdot\frac{e \sin V}{(1+e\cos V)^2}$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{d}{dV}\left(\frac{h}{R^2}\right)\frac{dV}{dt} = -\frac{2h^2}{R^5}\frac{dR}{dV}$$

L'équation devient :

$$\frac{h^2}{R^4}\frac{d^2\theta_3}{dV^2} - \frac{2h^4}{R^5\, g_0\, R_0^2}\frac{e \sin V}{(1+e\cos V)^2}\left(\frac{d\theta_3}{dV} + 1\right) - \frac{3g_0 R_0^2}{R^3} K_3 \sin\theta_3 \cos\theta_3 = 0$$

En divisant tout par $g_0 R_0^2/R^3$, on obtient :

$$\frac{h^2}{g_0 R_0^2 R}\frac{d^2\theta_3}{dV^2} - \frac{2h^4}{R^2(g_0 R_0^2)^2}\frac{e \sin V}{(1+e\cos V)^2}\left(\frac{d\theta_3}{dV} + 1\right) - 3K_3 \sin\theta_3 \cos\theta_3 = 0$$

Soit :

$$(1+e\cos V)\frac{d^2\theta_3}{dV^2} - 2e \sin V \frac{d\theta_3}{dV} - 3K_3 \sin\theta_3 \cos\theta_3 = 2e \sin V \qquad \text{(IV.1.2.)}$$

En posant $\theta = 2\theta_3$

$$(1+e\cos V)\frac{d^2\theta}{dV^2} - 2e \sin V \frac{d\theta}{dV} - 3K_3 \sin\theta = 4e \sin V$$

En ne considérant que le cas où A < B, on peut poser :

$$-3K_3 = \Omega^2 \qquad \text{avec} \qquad 0 < \Omega^2 < 3$$

$$(IV.1.3) \quad (1+e\cos V)\frac{d^2\theta}{dV^2} - 2e\sin V\frac{d\theta}{dV} + \Omega^2 \sin\theta = 4e\sin V$$

Nous pouvons à ce stade faire quelques remarques qui nous guideront dans la recherche de la solution.

Le fait de changer V en -V et θ en $-\theta$ ne modifie pas l'équation (IV.1.3)

$\theta(V)$ et $-\theta(-V)$ sont donc également solutions.

Le phénomène physique (symétrie du mouvement par rapport au grand axe de l'orbite) nous incite à penser que les solutions seront impaires. Ce sera obligatoirement le cas si la solution est unique.

IV.2 Résolution numérique

Cette équation n'étant pas simple à aborder analytiquement, nous allons dans un premier temps effectuer une résolution numérique qui va nous permettre d'orienter nos investigations.

Nous utilisons pour cela une méthode de Runge-Kutta du 4e ordre. Le problème est résolu sur IBM 1130 couplé à un traceur de courbe BENSON. Les figures qui suivent donnent une idée de la solution avec une excentricité de 0.03 et un Ω^2 égal à 1,35. (Fig.24,25,26).

Comme l'équation le laisse prévoir, si θ reste suffisamment petit, nous observons un phénomène de battement résultant de la superposition d'oscillations de pulsation Ω et 1. (Fig.24 essais 1, 2, 4 - Fig.25 essai 1, 2, 3).

Pour certaines conditions initiales pourtant, nous obtenons un premier mouvement parfaitement périodique de période 2Π et c'est justement celui qui correspond à une amplitude de θ_3 minimum. La recherche systématique de telles solutions va donc présenter un grand intérêt. (Fig.24 essai 3).

En augmentant ensuite θ'_V à l'instant initial, positivement et négativement, nous voyons apparaître une solution périodique, soit instable, soit stable selon le cas, mais de plus grande amplitude. Au voisinage de la solution périodique non permanente, le phénomène est instable au sens classique du terme. (Fig.25 essai 4 fig.26 essai 3).

Un autre essai toujours avec une excentricité de 0,03, mais avec un Ω^2 égal à 0,90 ne laisse plus apparaître que la solution périodique stable de plus faible amplitude, mais avec un déphasage de ¶. (Fig. 27 essai n°4).

Ces deux essais semblent donner les deux modes principaux d'oscillations qui apparaissent si l'on fait varier ZK3.

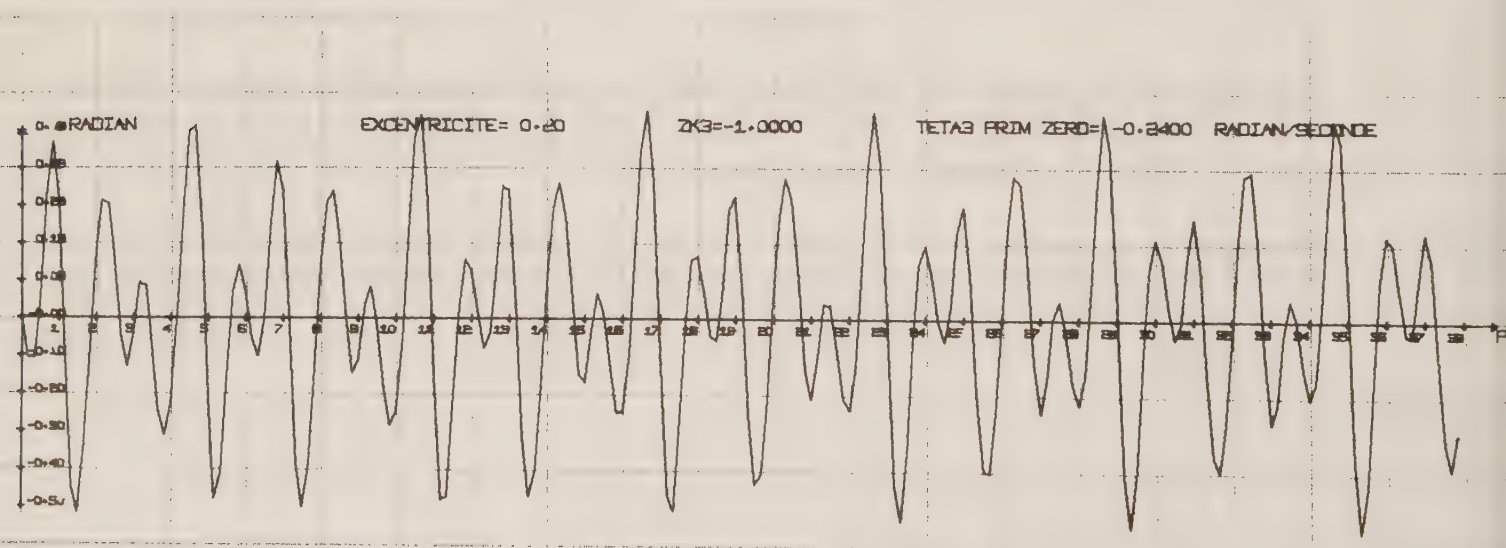
Pour une valeur de ZK3 fonction de l'excentricité, le mouvement est instable quelles que soient les conditions initiales (résonance).

La figure 28 précise 5 essais à $\Omega^2 = 0.60$ donnant la solution périodique si l'excentricité varie de 0,01 à 0,10. Les vitesses initiales nécessaires sont alors les suivantes :

$\Omega^2 = 0,60$	e = 0,01	θ'_{30} = - 0,06 radian/s	essai n°1
	e = 0,03	θ'_{30} = - 0,14 radian/s	essai n°2
	e = 0,05	θ'_{30} = - 0,24 radian/s	essai n°3
	e = 0,08	θ'_{30} = - 0,35 radian/s	essai n°4
	e = 0,10	θ'_{30} = - 0,44 radian/s	essai n°5

Nous trouvons enfin ci-dessous un essai avec une excentricité de 0,20 pour $\Omega^2 = 3$. Même pour θ'_{30} = - 0,24 radian/s, la solution est encore stable . Nous avons trouvé que si $\Omega^2 = 3$, la solution était stable pour toute valeur de l'excentricité inférieure à 0,35. Au-dessus de cette valeur, il n'est plus possible de trouver une solution stable.

La figure 29 nous donne les amplitudes maximum des solutions obtenues lorsque l'excentricité varie, de même que Ω^2.



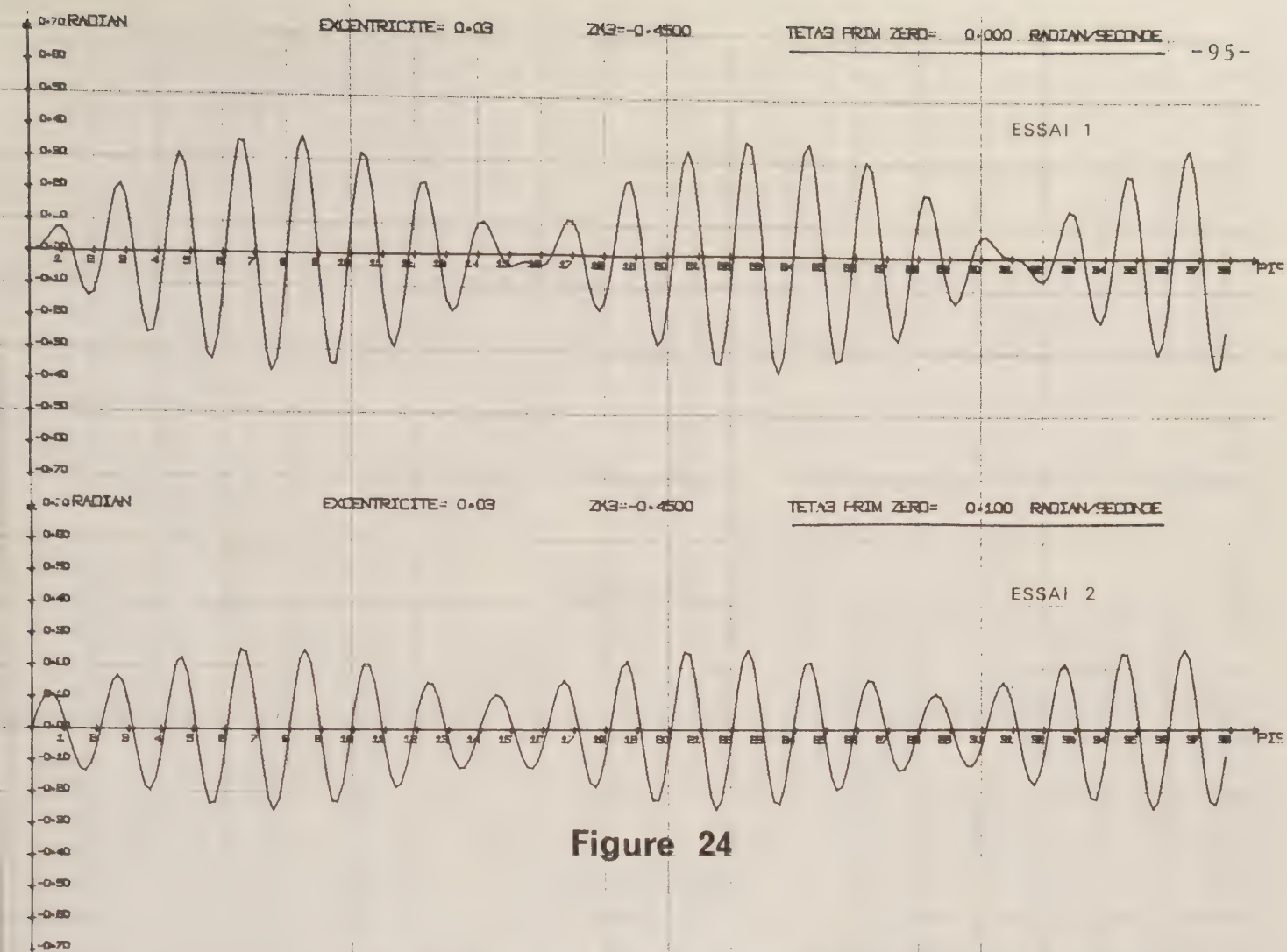
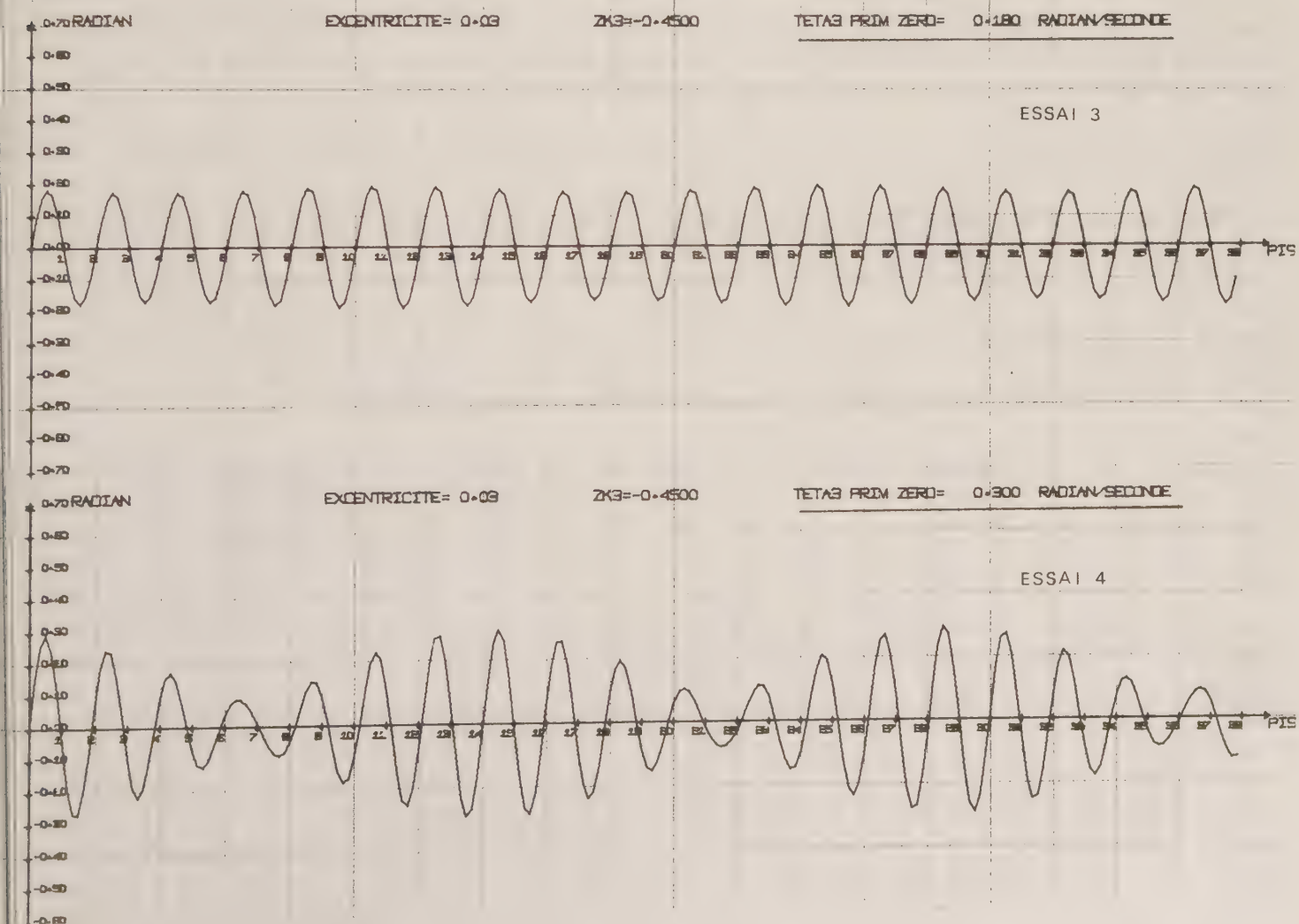

RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.4500
TETA3 PRIM ZERO= 0.000 RADIAN/SECONDE
ESSAI 1
PIS
RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.4500
TETA3 PRIM ZERO= 0.100 RADIAN/SECONDE
ESSAI 2
PIS

Figure 24


RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.4500
TETA3 PRIM ZERO= 0.180 RADIAN/SECONDE
ESSAI 3
PIS
RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.4500
TETA3 PRIM ZERO= 0.300 RADIAN/SECONDE
ESSAI 4
PIS

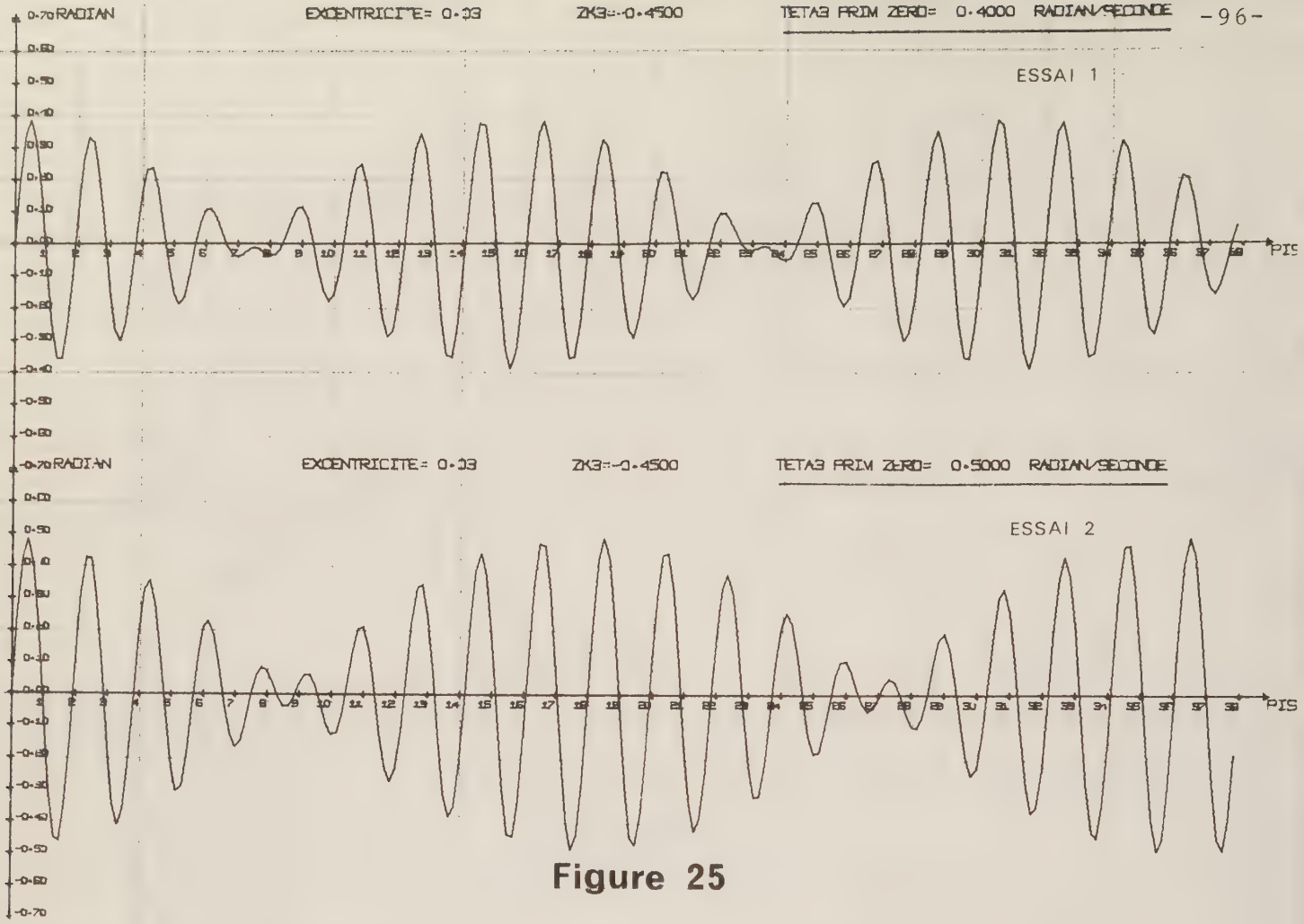
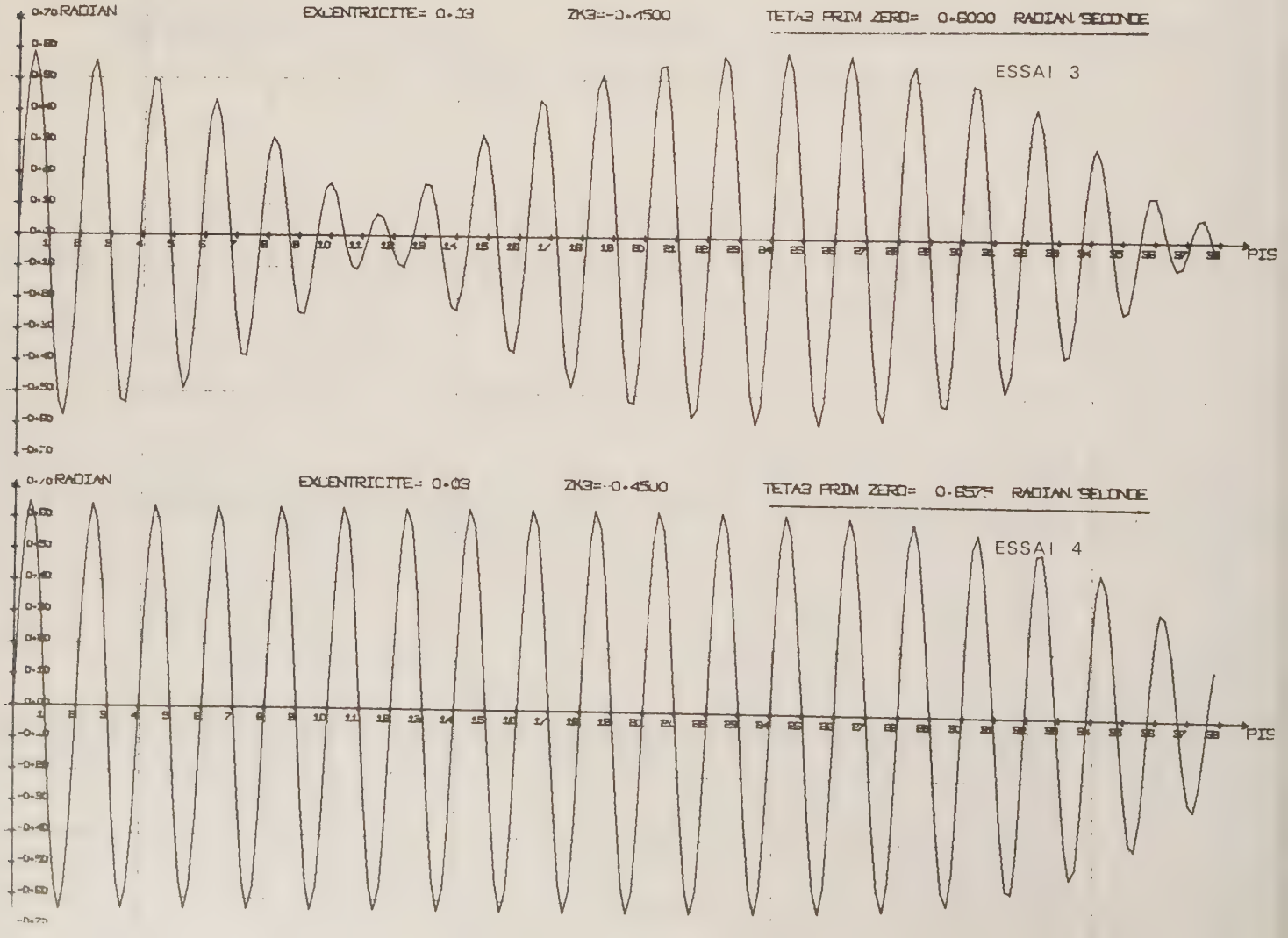

0.70 RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.4500
TETA3 PRIM ZERO= 0.4000 RADIAN/SECONDE
ESSAI 1
PIS
0.70 RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.4500
TETA3 PRIM ZERO= 0.5000 RADIAN/SECONDE
ESSAI 2
PIS

Figure 25


0.70 RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.4500
TETA3 PRIM ZERO= 0.6000 RADIAN/SECONDE
ESSAI 3
PIS
0.70 RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.4500
TETA3 PRIM ZERO= 0.6575 RADIAN/SECONDE
ESSAI 4
PIS

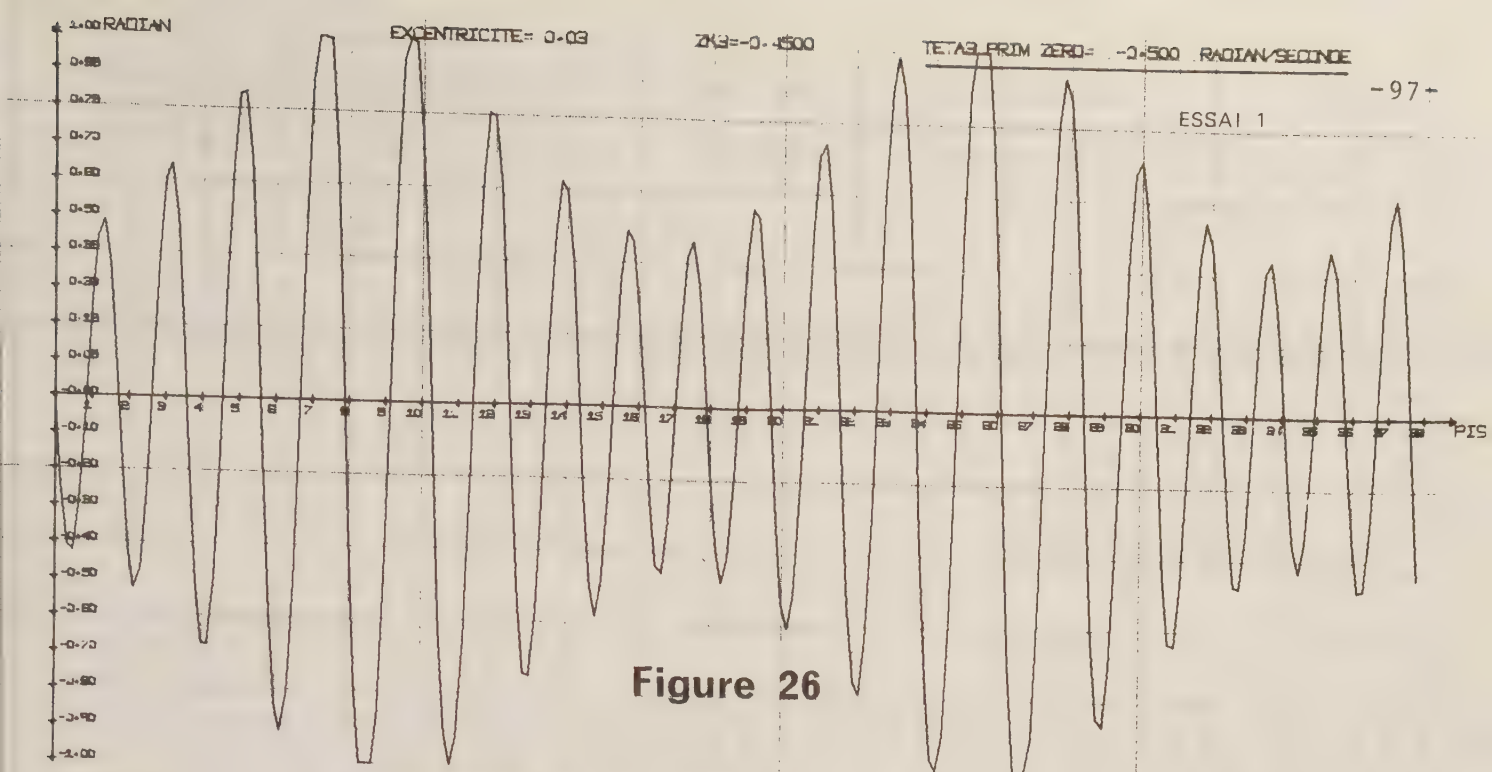
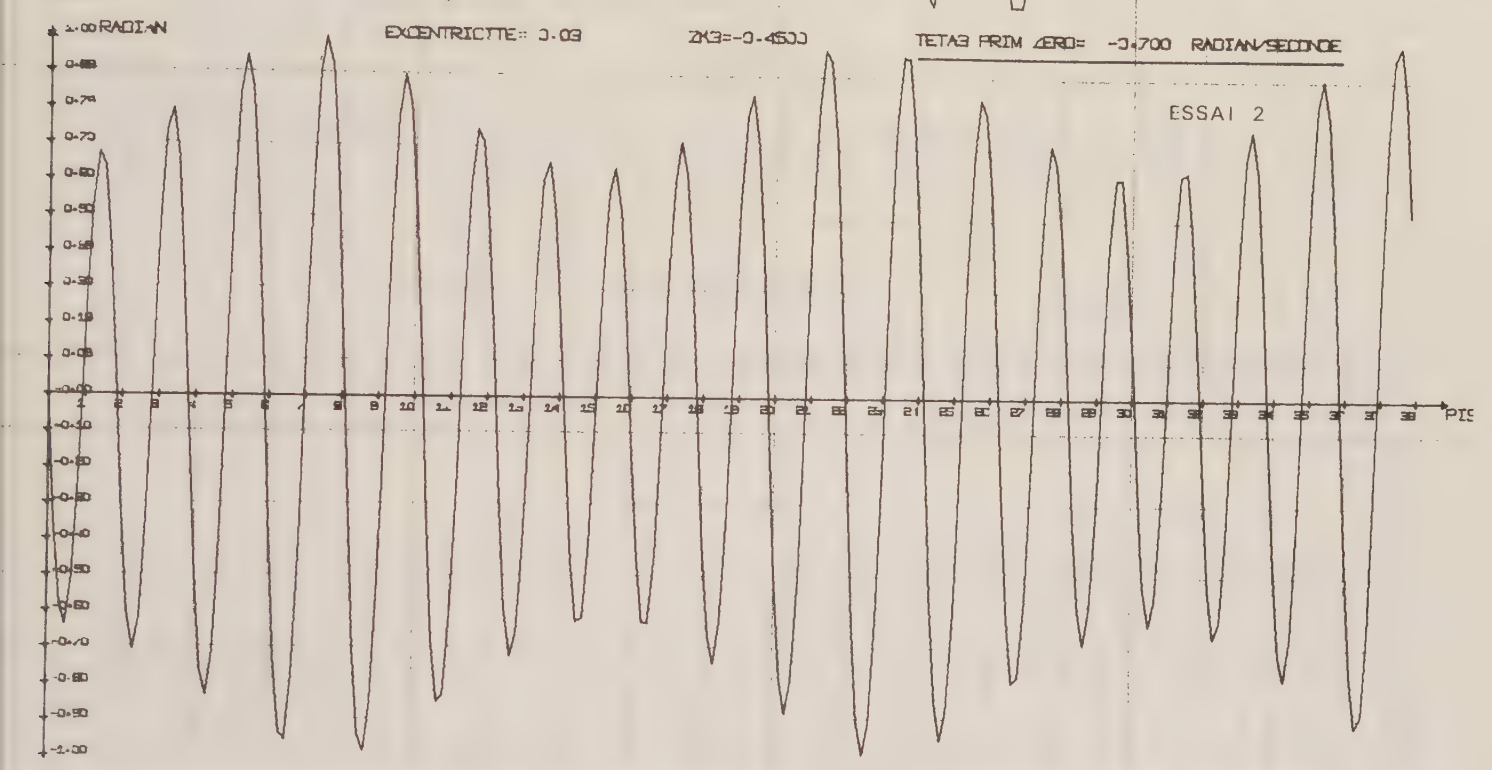
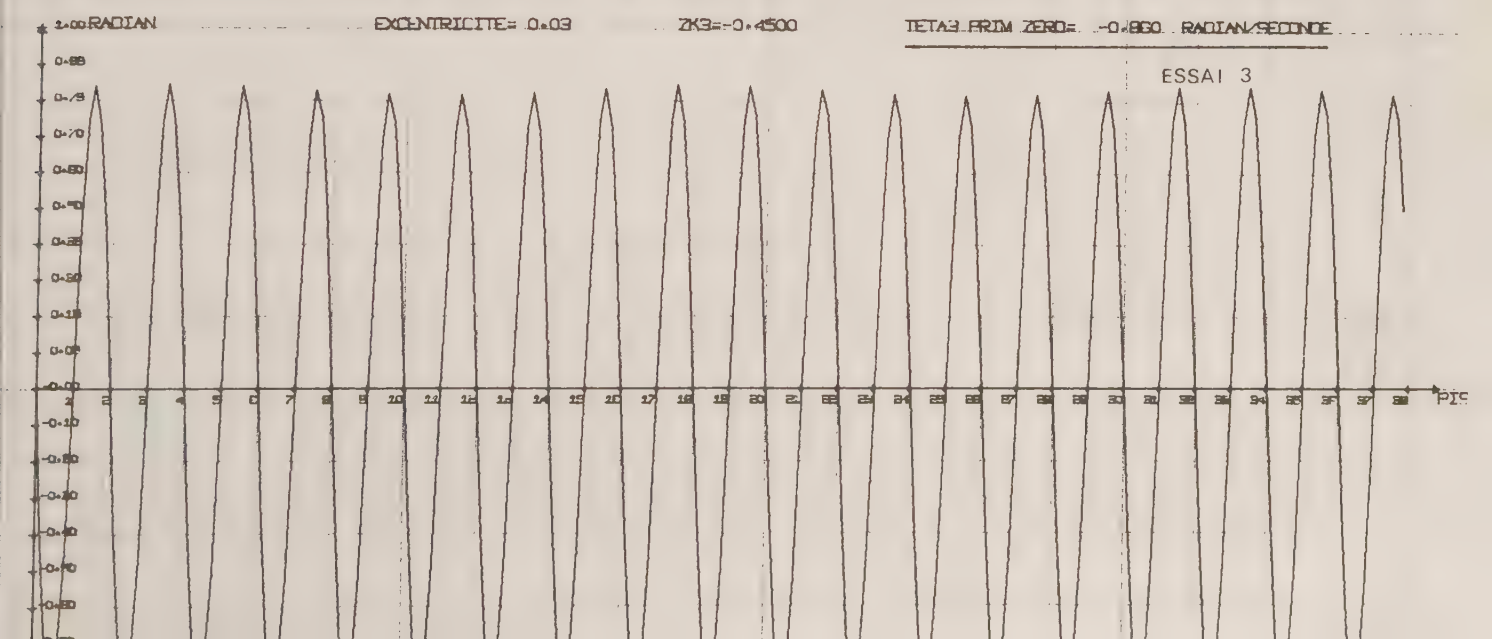
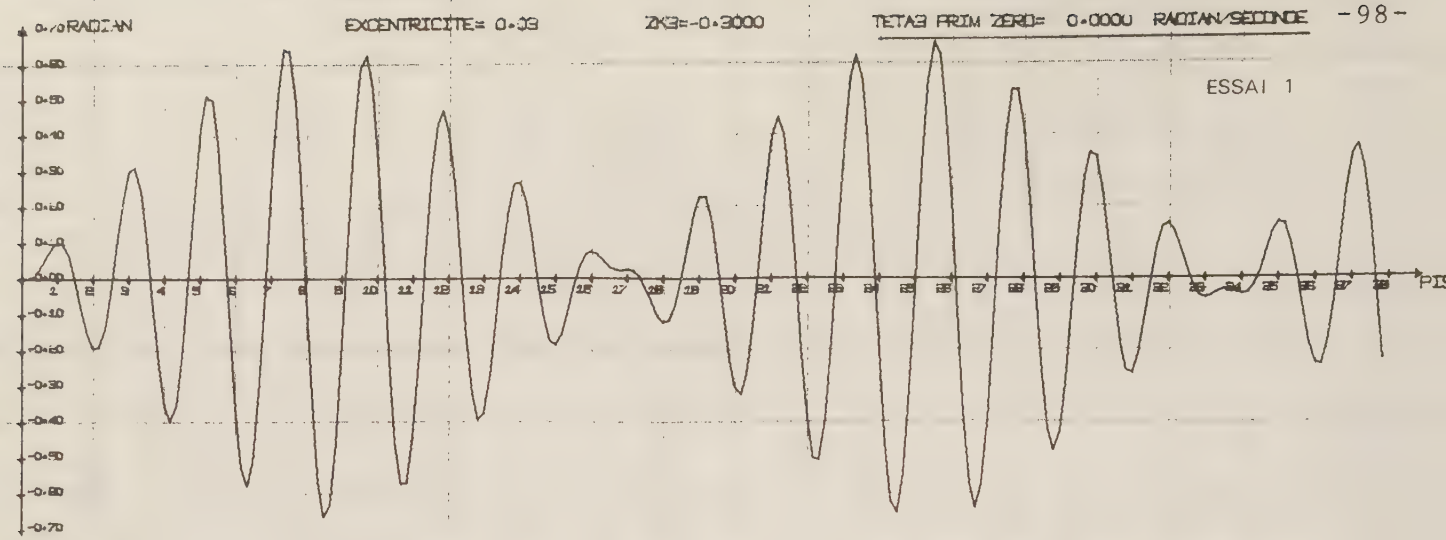

RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.4500
TETA3 PRIM ZERO= -0.500 RADIAN/SECONDE
ESSAI 1
PIS

Figure 26


RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.4500
TETA3 PRIM ZERO= -0.700 RADIAN/SECONDE
ESSAI 2
PIS


RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.4500
TETA3 PRIM ZERO= -0.860 RADIAN/SECONDE
ESSAI 3
PIS


RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.3000
TETA3 PRIM ZERO= 0.0000 RADIAN/SECONDE
ESSAI 1
PIS

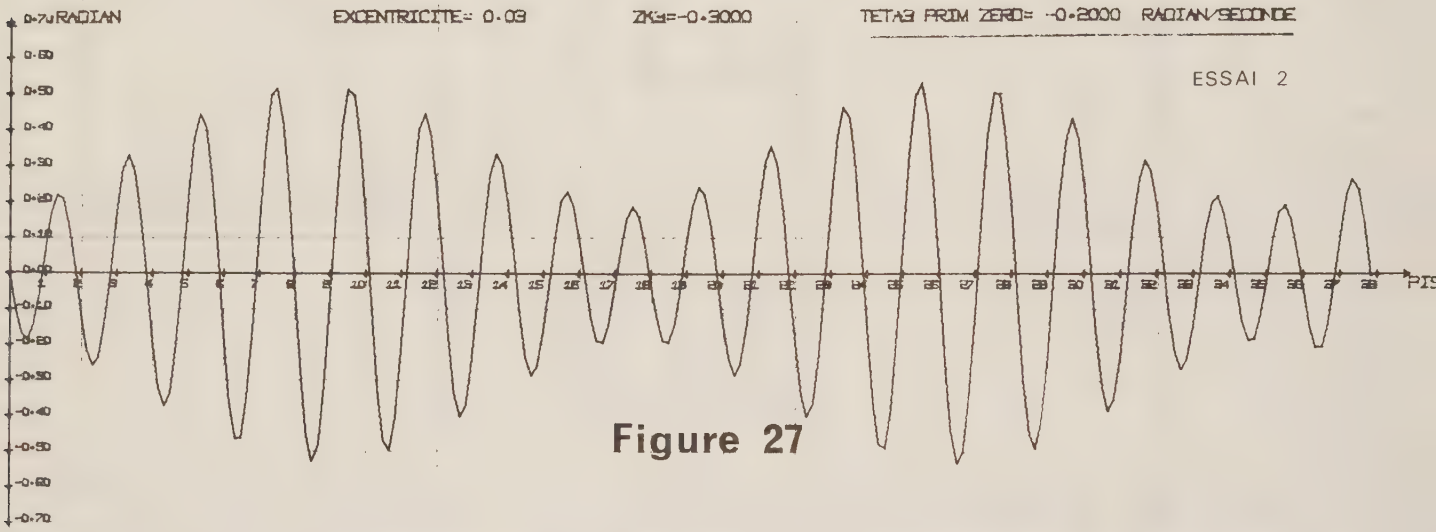
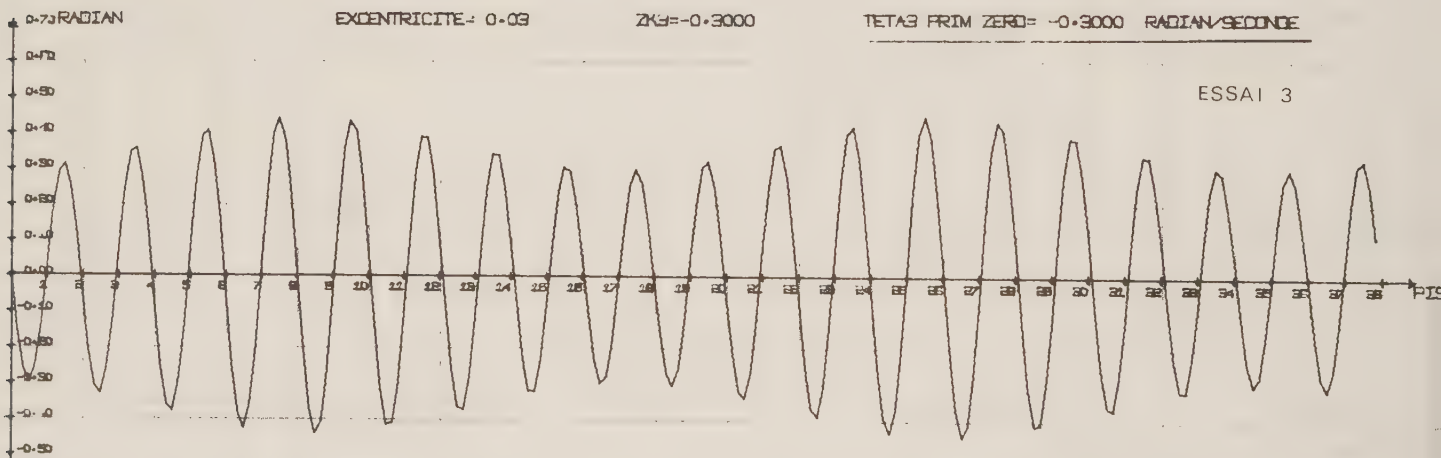
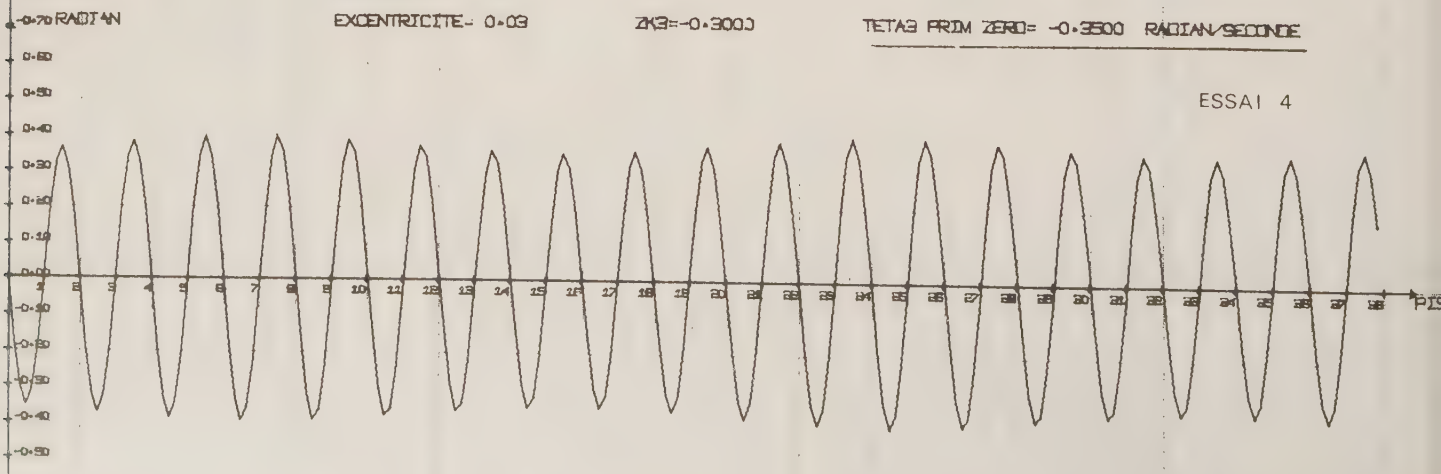

RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.3000
TETA3 PRIM ZERO= -0.2000 RADIAN/SECONDE
ESSAI 2
PIS

Figure 27


RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.3000
TETA3 PRIM ZERO= -0.3000 RADIAN/SECONDE
ESSAI 3
PIS


RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.3000
TETA3 PRIM ZERO= -0.3500 RADIAN/SECONDE
ESSAI 4
PIS

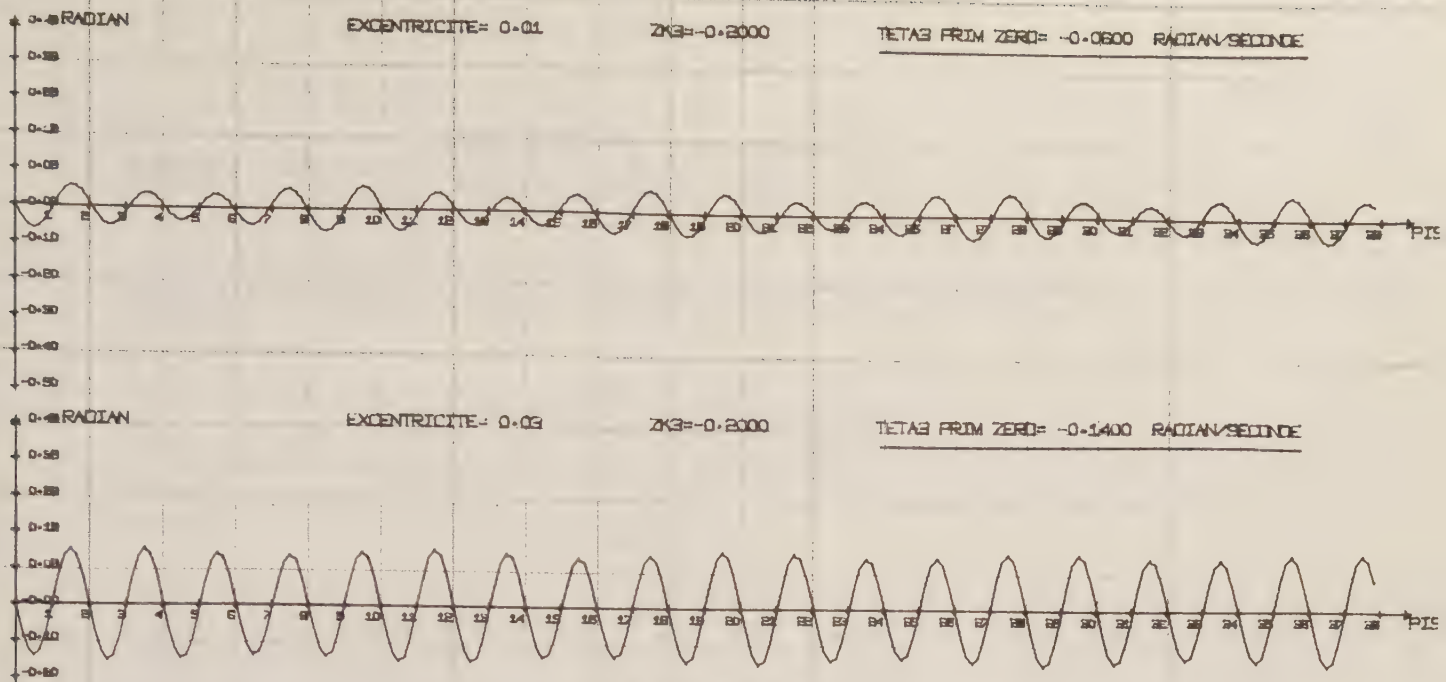
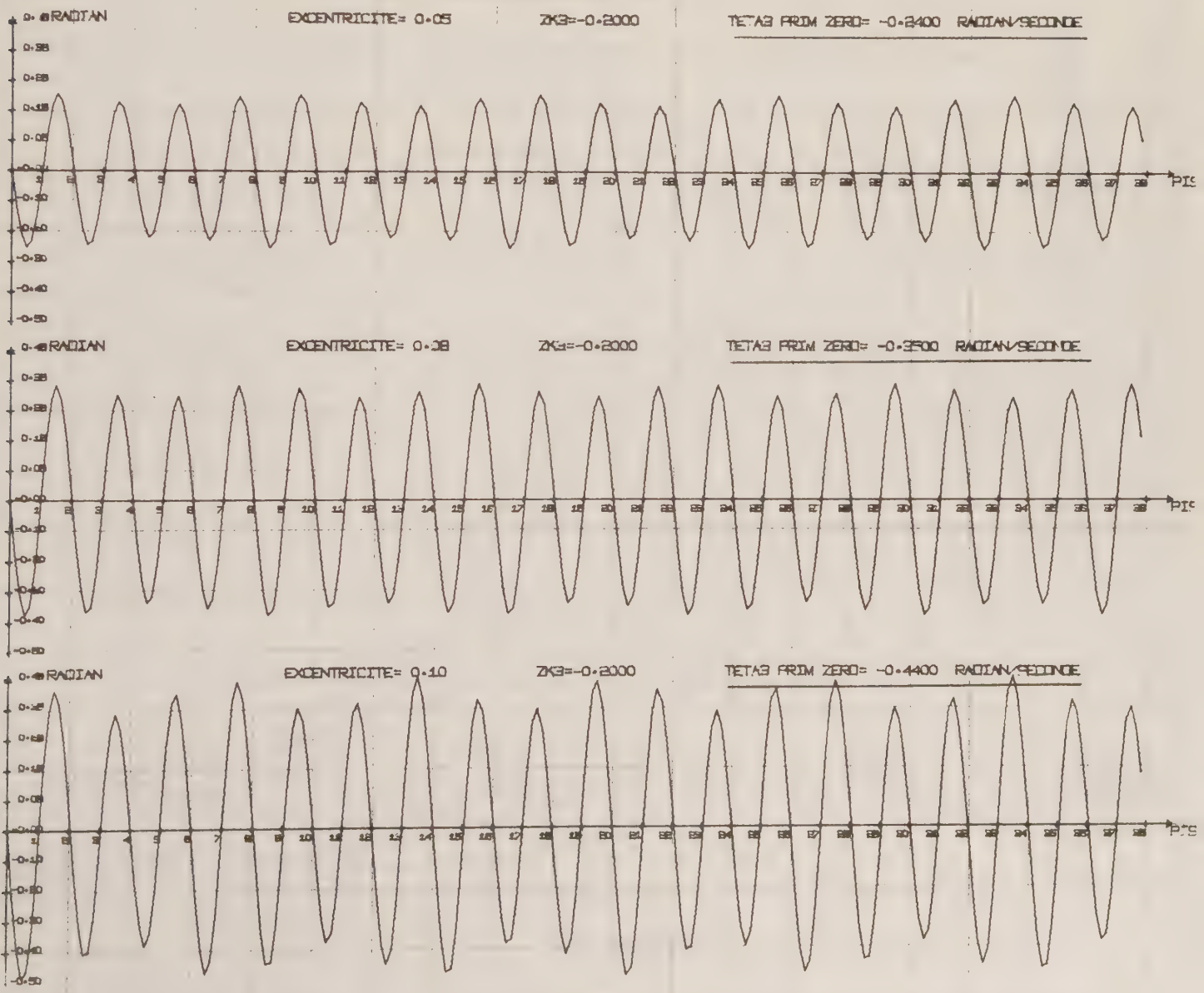

RADIAN
EXCENTRICITE= 0.01
ZK3=-0.2000
TETA3 PRIM ZERO= -0.0600 RADIAN/SECONDE
RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.2000
TETA3 PRIM ZERO= -0.1400 RADIAN/SECONDE

Figure 28


RADIAN
EXCENTRICITE= 0.05
ZK3=-0.2000
TETA3 PRIM ZERO= -0.2400 RADIAN/SECONDE
RADIAN
EXCENTRICITE= 0.08
ZK3=-0.2000
TETA3 PRIM ZERO= -0.3500 RADIAN/SECONDE
RADIAN
EXCENTRICITE= 0.10
ZK3=-0.2000
TETA3 PRIM ZERO= -0.4400 RADIAN/SECONDE

RESOLUTION NUMERIQUE

AMPLITUDE MAXIMUM DES SOLUTIONS $A(\Omega^2, e)$

$\left(\frac{d\theta}{dV}\right)_0$ 0[redacted] et θ_0 = 1 degre

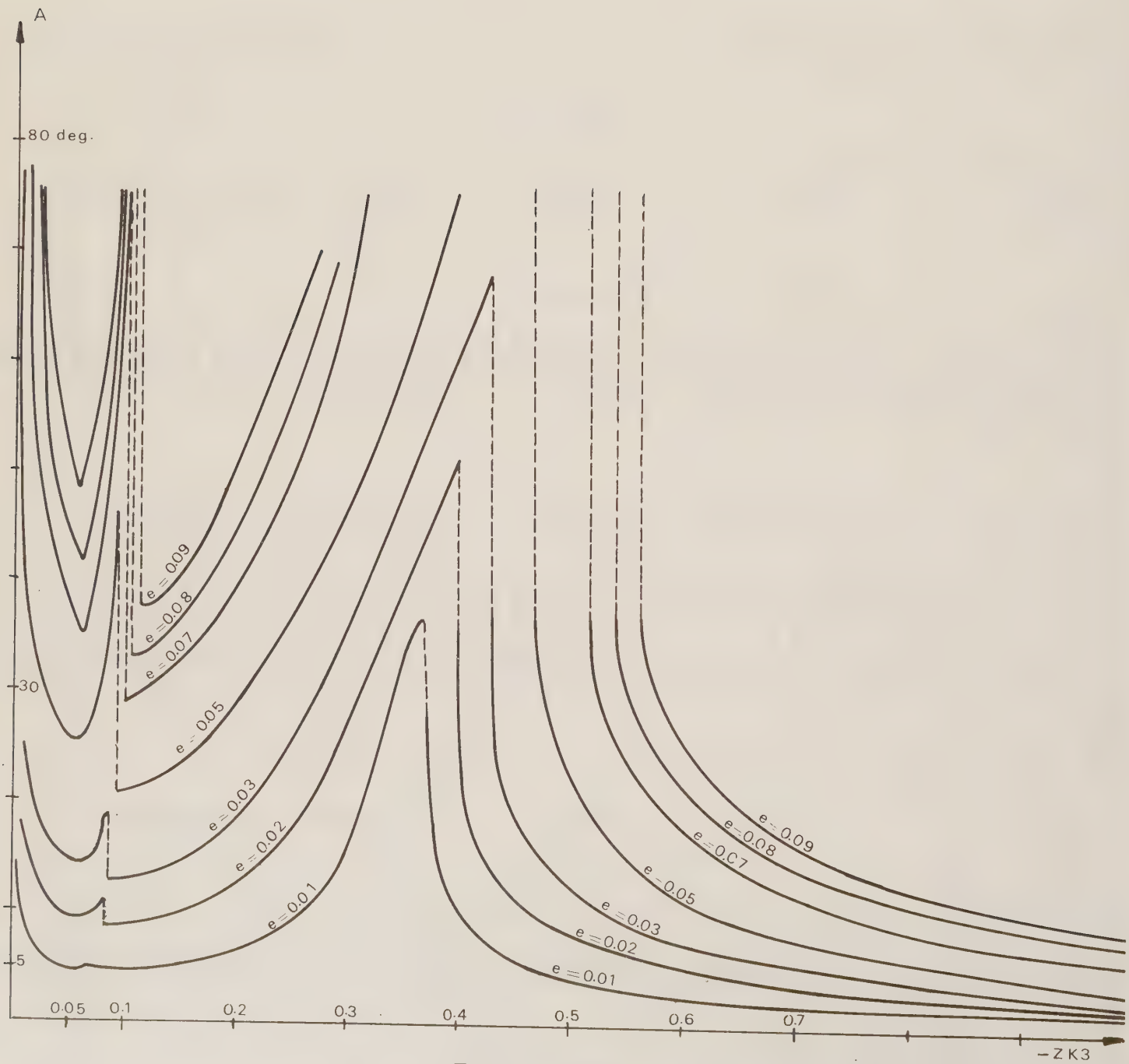


Figure 29

IV.3 Recherche des solutions périodiques. Méthode des conséquents de Poincaré.

Les mouvements les plus intéressants pour nous sont donc les oscillations périodiques de période 2π. Le système est en effet excité par un terme de cette période.

Il est alors commode de considérer l'état du système évoluant, avec des conditions initiales déterminées, à diverses époques également distantes. L'état du système à chacune de ces époques peut être représenté par un point "conséquent" dans un certain espace, appelé dans notre cas "plan de phase" (*). Un mouvement périodique est représenté par un point fixe.

Autrement dit, le système différentiel est remplacé par une transformation ponctuelle de l'espace des phases en lui-même. Lorsqu'un système possède un ou plusieurs régimes périodiques, suivant les conditions initiales, le mouvement tend vers l'un ou l'autre régime périodique. Le domaine d'attraction d'un régime périodique est l'ensemble des conditions initiales à partir desquelles le mouvement tend vers ce régime périodique. Nous nous intéresserons aux domaines d'attractions et aux points fixes du point de vue de la transformation "conséquent.

Dire qu'une courbe est invariante dans la transformation "conséquent", signifie que, si on fixe des conditions initiales correspondant à un point de la courbe les conséquents successifs issus de ce point sont situés sur la courbe considérée.

La suite de points sur chacune des courbes invariantes dans la transformation "conséquent" est obtenue par intégration numérique de l'équation différentielle non linéaire (IV.1.2).

Pour une excentricité de 0.03, nous explorons le plan de phase pour des valeurs de Ω^2 comprises entre 0.21 et 2.10.

Si $0.21 \leqslant \Omega^2 \leqslant 1.20$, nous avons une oscillation périodique de période 2π avec un θ'_v initial négatif. Nous voyons également apparaître des oscillations de période 4π et restant d'amplitude convenable lorsque $0.30 \leqslant \Omega^2 \leqslant 0.40$. (fig.31 et32).

Pour des valeurs de Ω^2 encore inférieures existent alors des mouvements de période 6π . (fig. 30).

Si $\Omega^2 \geqslant 1.35$, trois oscillations de période 2π peuvent se présenter. La plus intéressante nécessite un θ'_v initial positif et son amplitude décroit lorsque Ω^2 augmente. Les deux autres au contraire, l'une stable, l'autre instable ont une amplitude croissante avec Ω^2. (Fig. 37,38,39).

Il est donné à la suite l'allure des courbes périodiques obtenues selon les différentes valeurs de Ω^2. (Fig.42 et 43 essais 1 à 7).

---

* Thèse d'Etat de Mr. Michel JEAN : "Sur les solutions périodiques des équations différentielles de la Mécanique". 6 juillet 1965. Faculté d'Aix-Marseille.

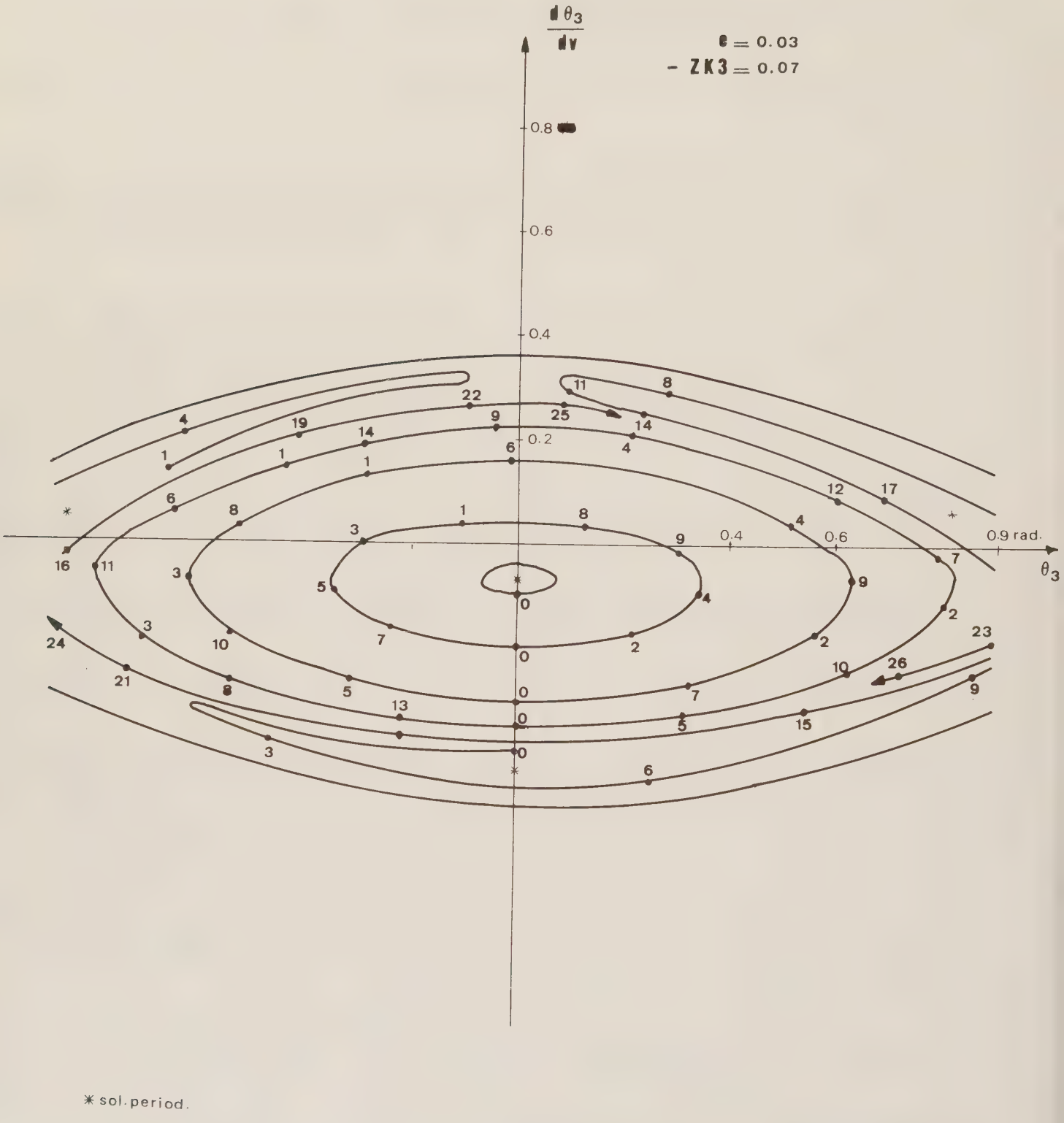


Figure 30

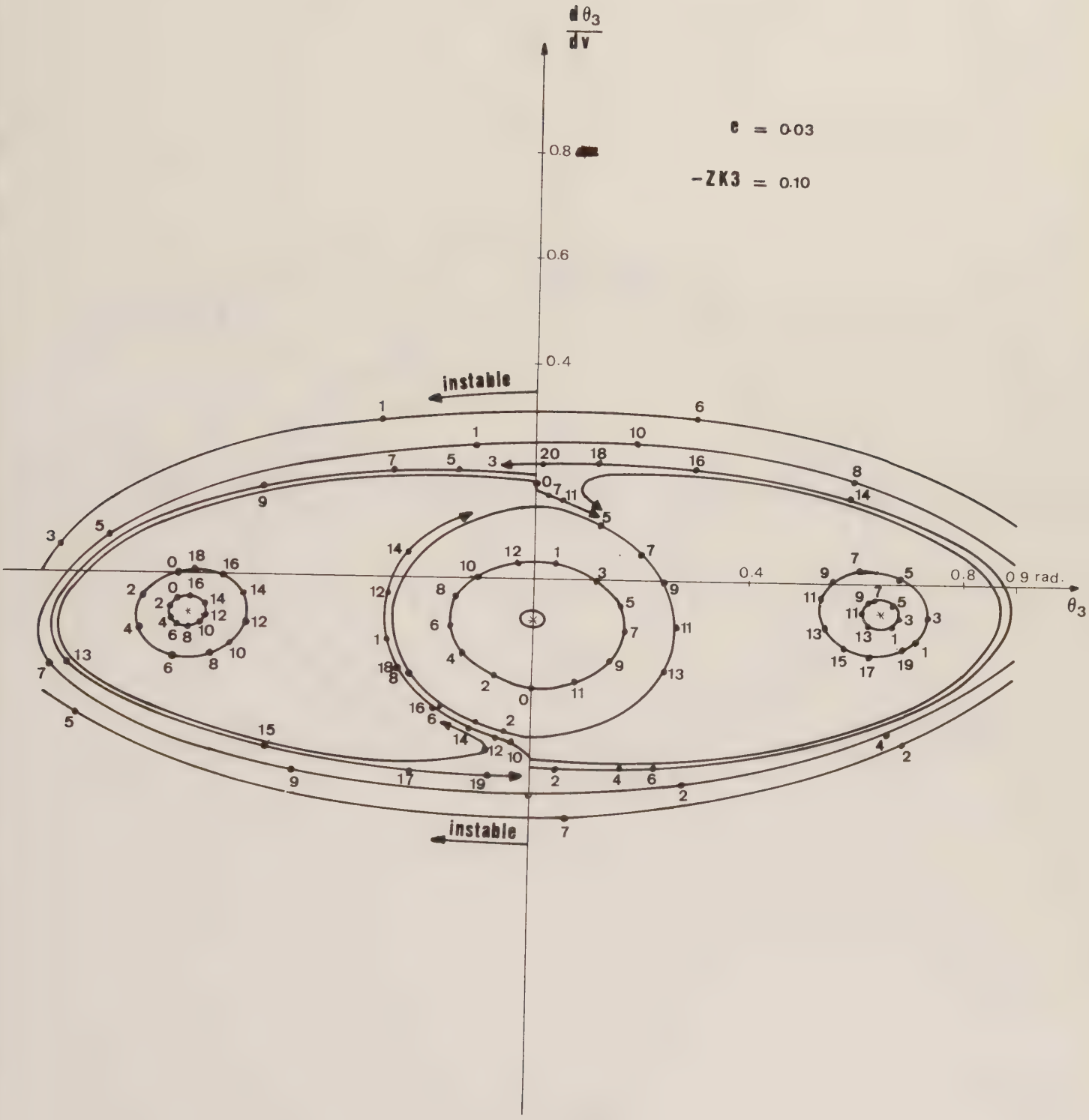


Figure 31

e = 0.03
- ZK3 = 0.13

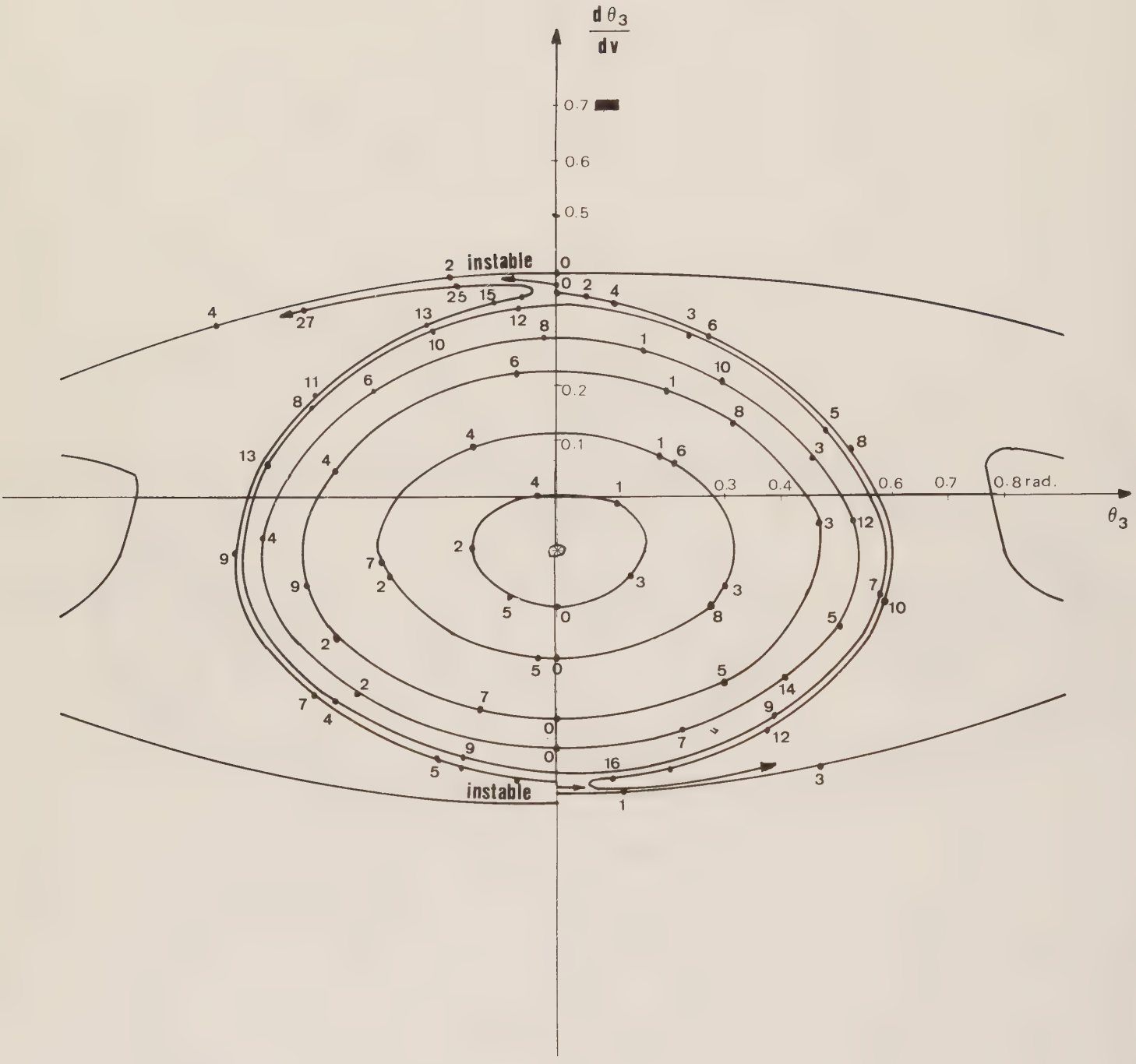


Figure 32

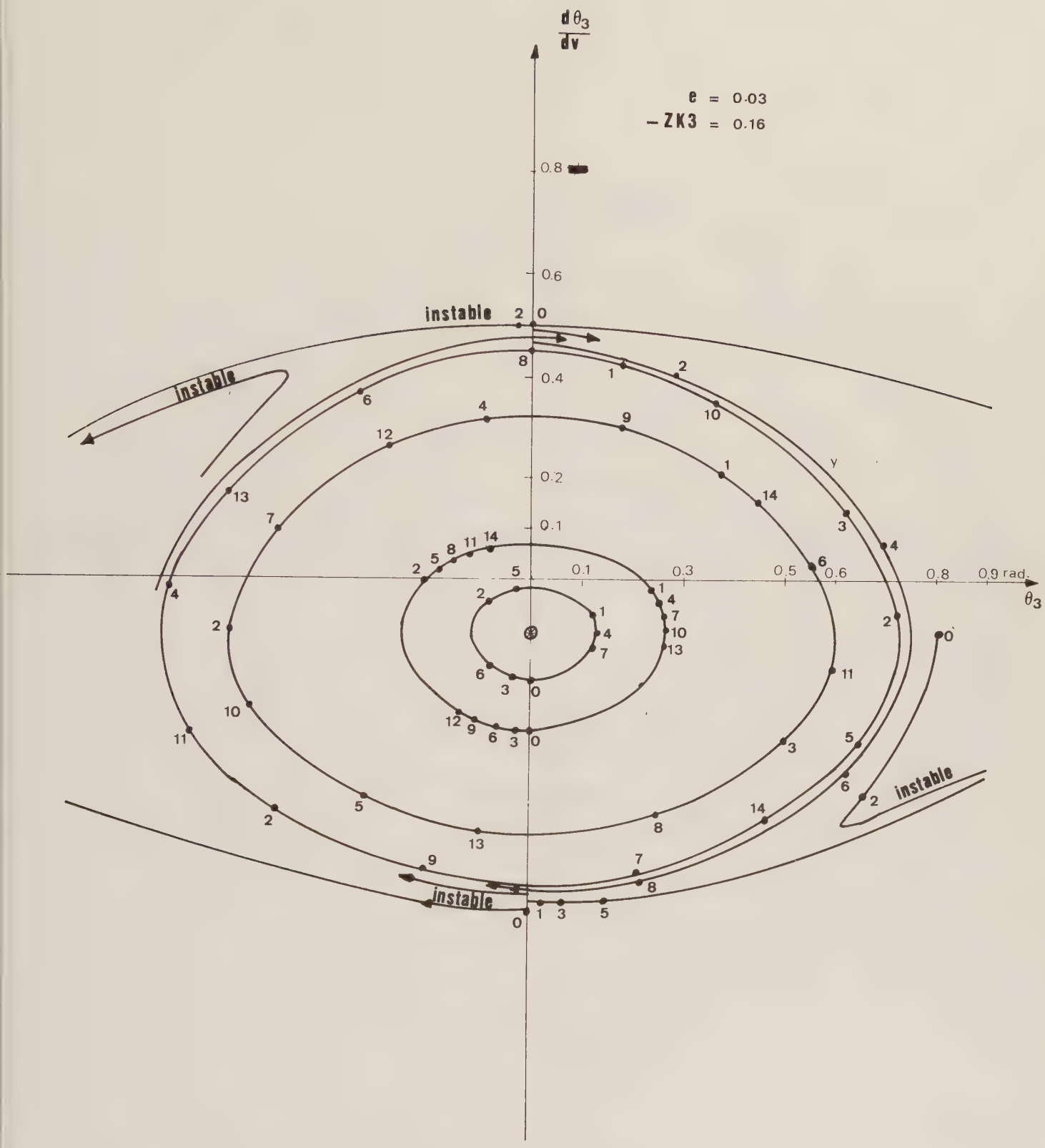

$\frac{d\theta_3}{dv}$
e = 0.03
-ZK3 = 0.16
0.8
0.6
0.4
0.2
0.1
instable
instable
instable
instable
0.1
0.3
0.5
0.6
0.8
0.9 rad.
θ_3
Y

Figure 33

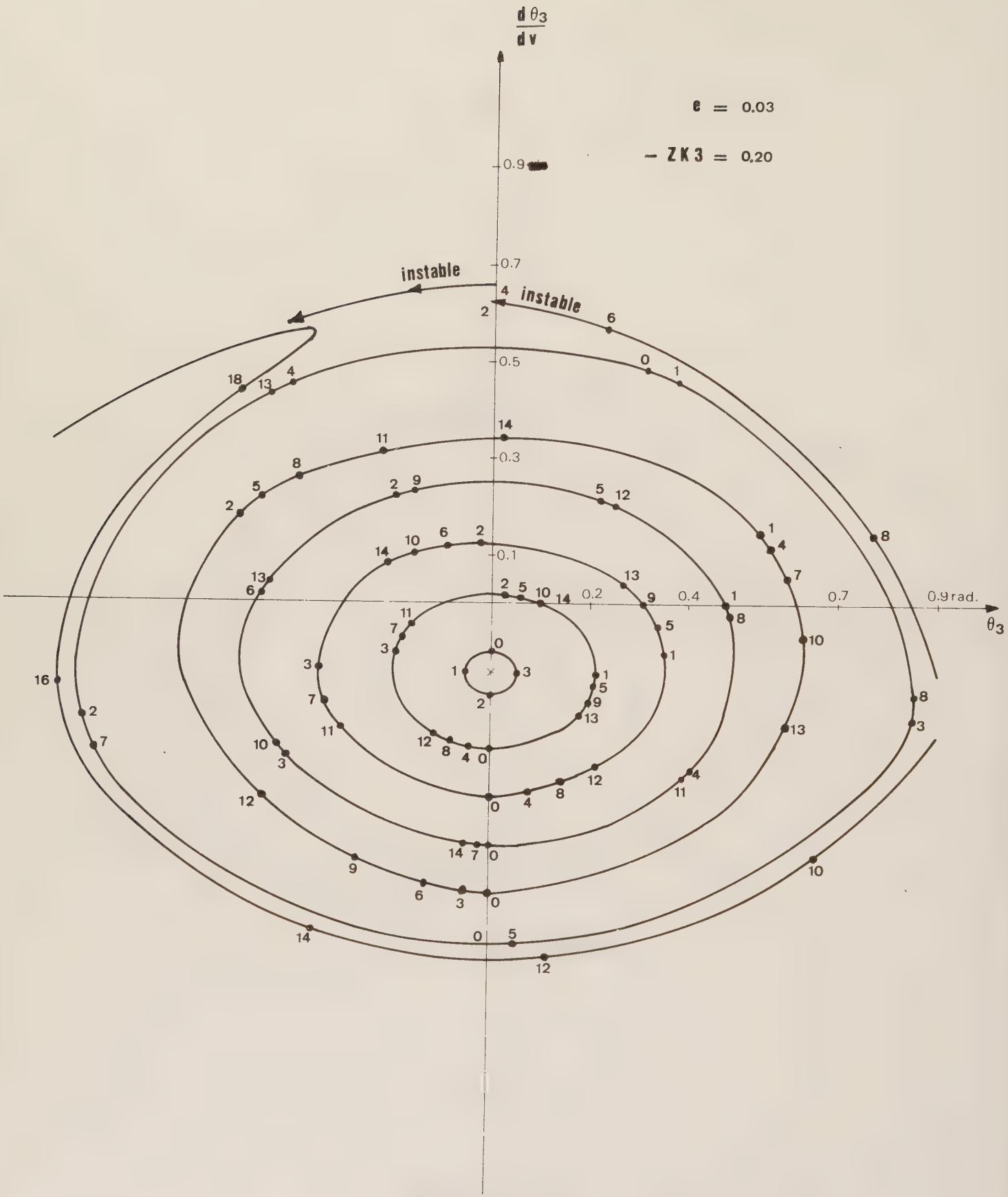

$\frac{d\theta_3}{dv}$
e = 0.03
− ZK3 = 0.20
0.9
0.7
0.5
0.3
0.1
instable
instable
0.2
0.4
1
0.7
0.9rad.
θ_3

Figure 34

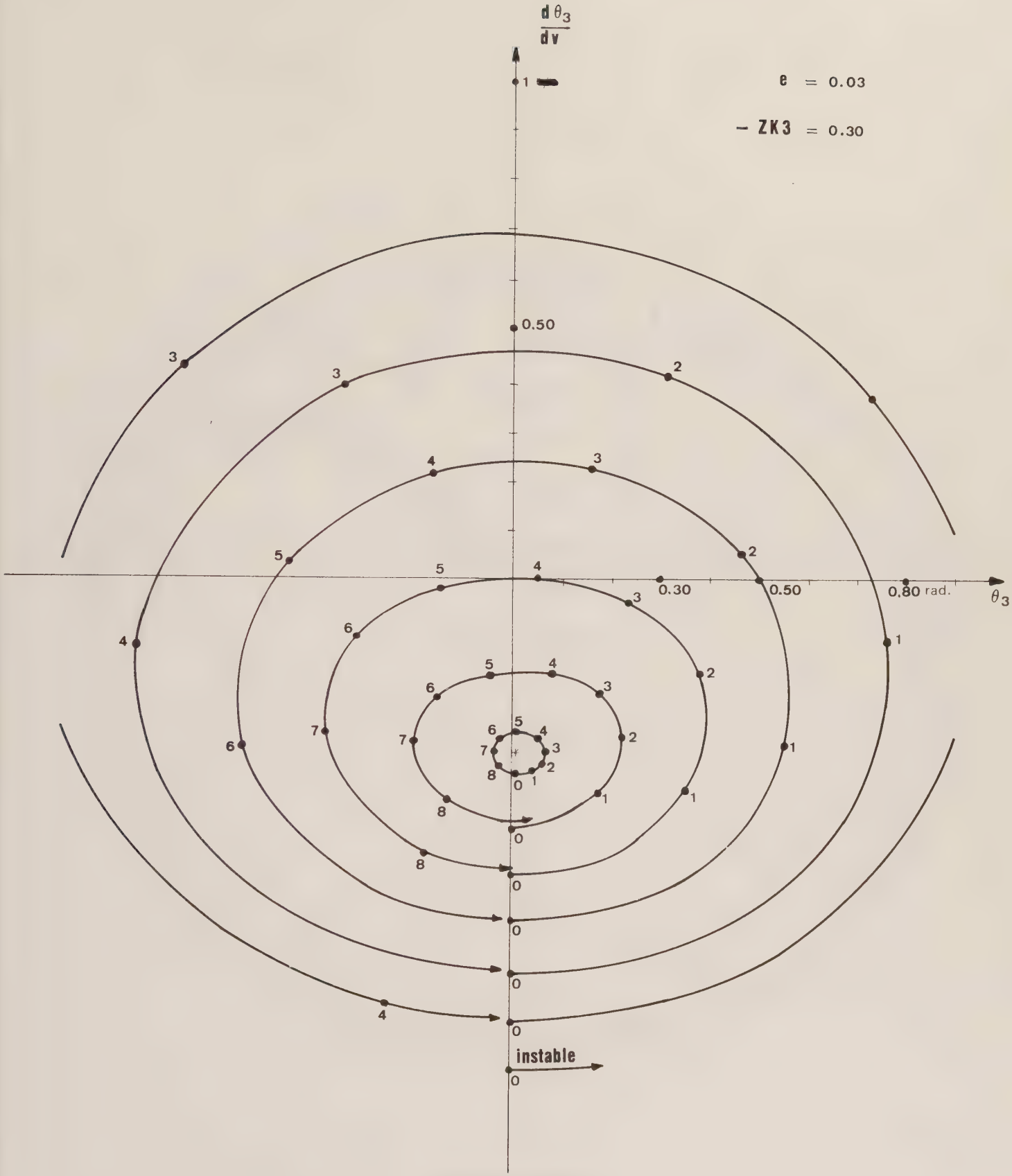

$\frac{d\theta_3}{dv}$
1
e = 0.03
- ZK3 = 0.30
0.50
0.30
0.50
0.80 rad.
θ_3
instable

Figure 35

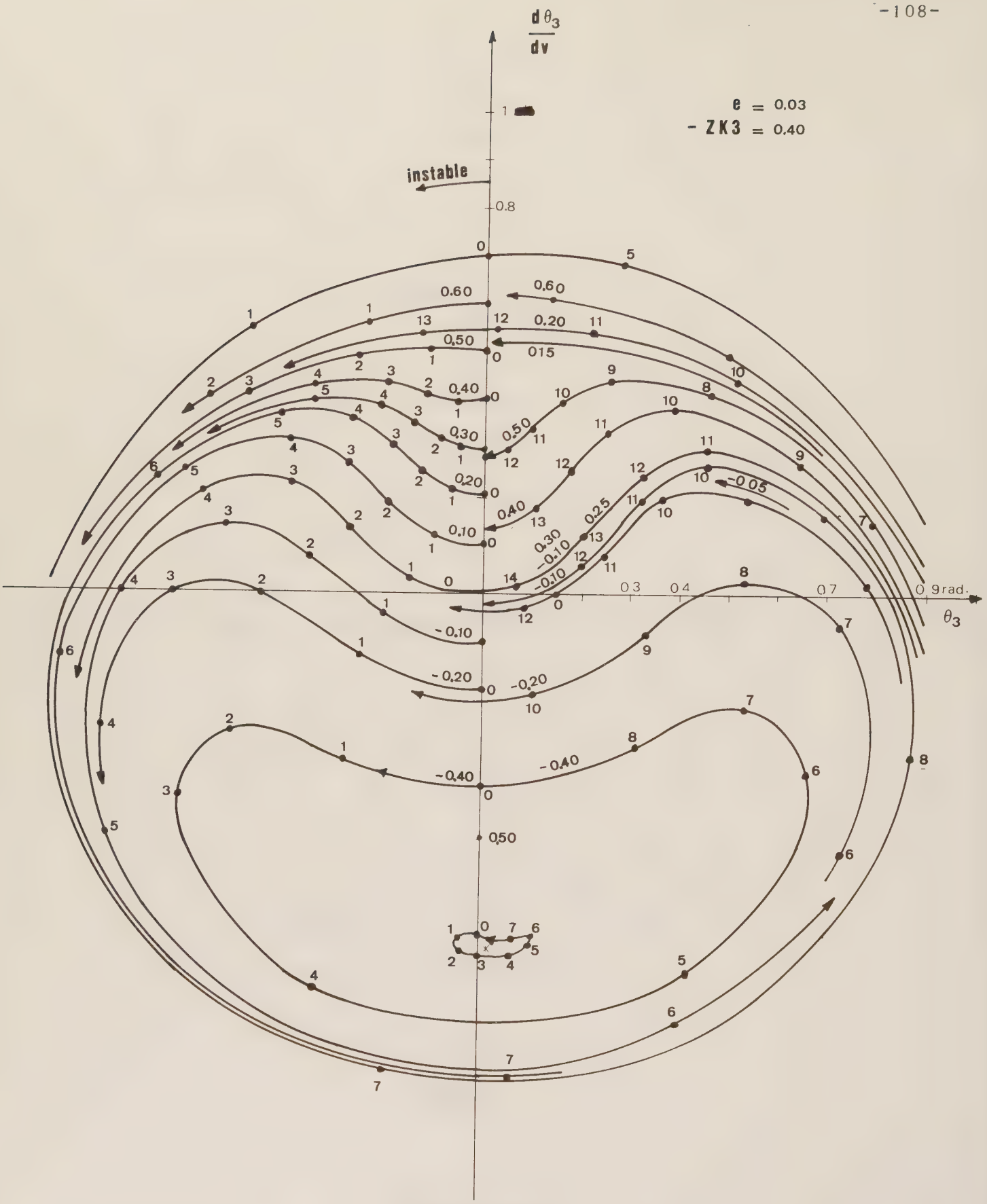

$\frac{d\theta_3}{dv}$
e = 0.03
- ZK3 = 0.40
instable
1
0.8
0.60
0.20
0.50
0.40
0.30
0.10
-0.10
-0.20
-0.40
-0.05
0.25
0.50
0.15
0.3
0.4
0.7
0.9rad.
θ_3

Figure 36

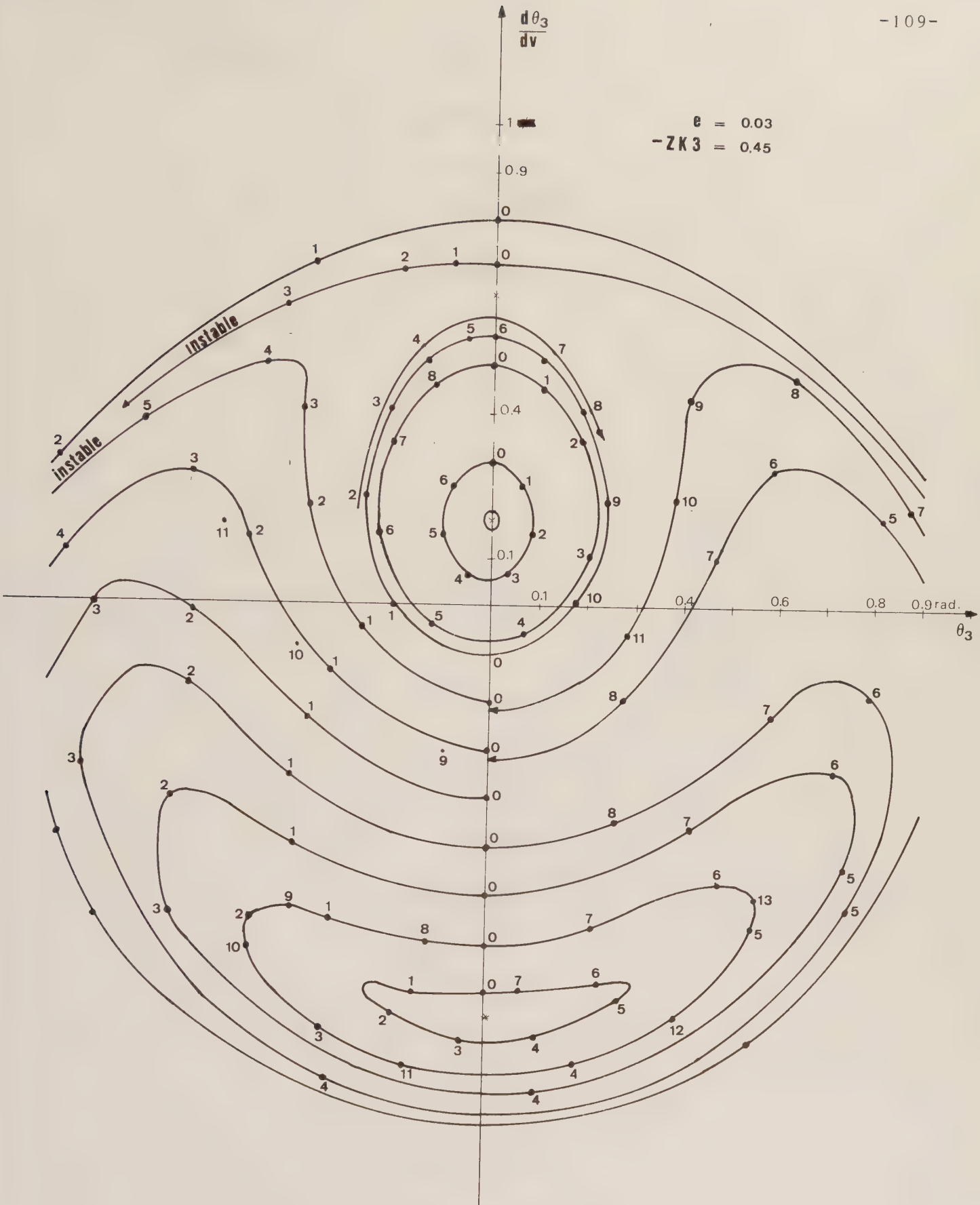

$\frac{d\theta_3}{dv}$
1
0.9
0.4
0.1
e = 0.03
-ZK3 = 0.45
instable
instable
0.1
0.4
0.6
0.8
0.9 rad.
θ_3

Figure 37

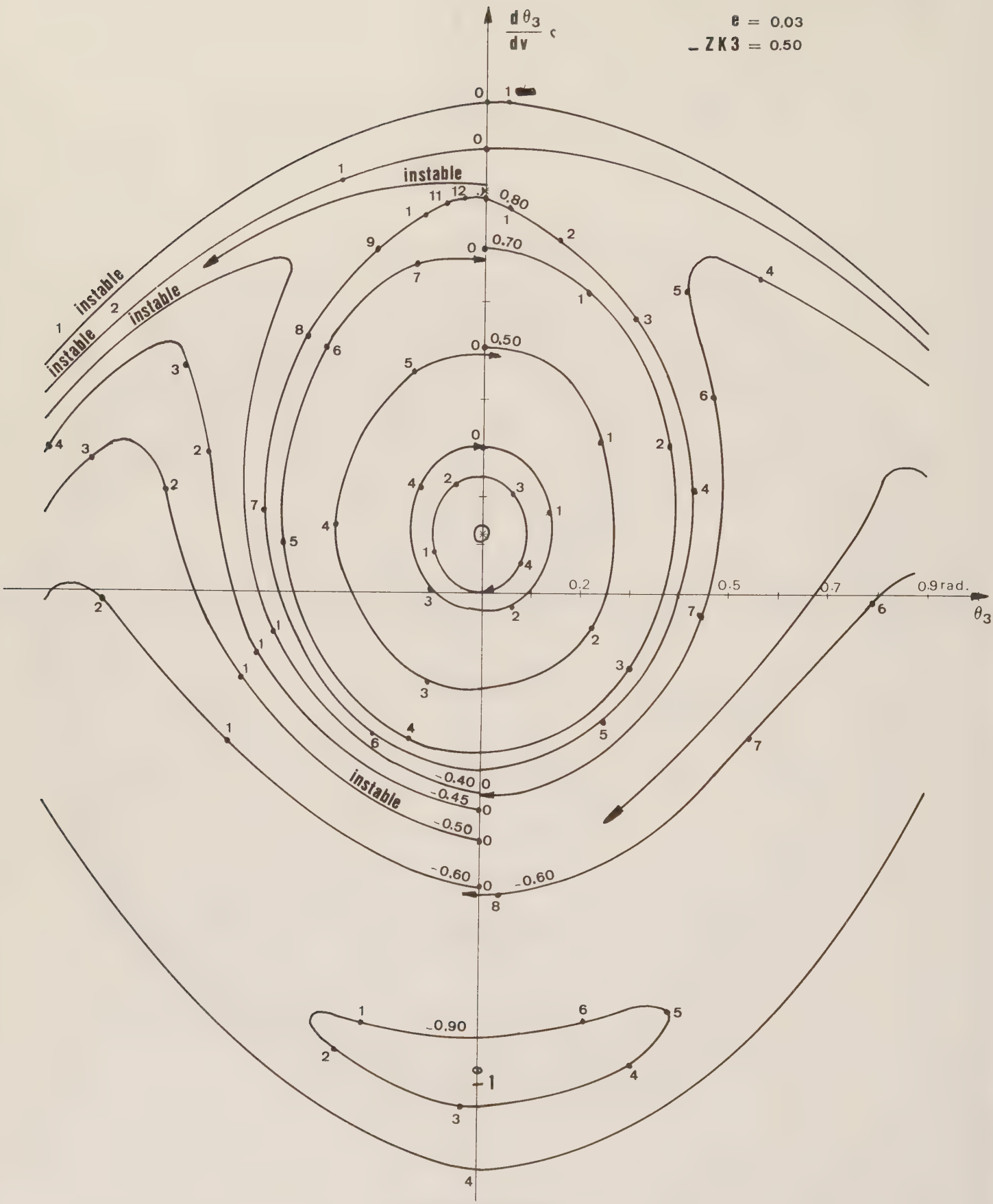

$\frac{d\theta_3}{dv}$
e = 0.03
_ZK3 = 0.50
instable
instable
instable
instable
0.80
0.70
0.50
-0.40
-0.45
-0.50
-0.60
-0.60
-0.90
0.2
0.5
0.7
0.9 rad.
θ_3

Figure 38

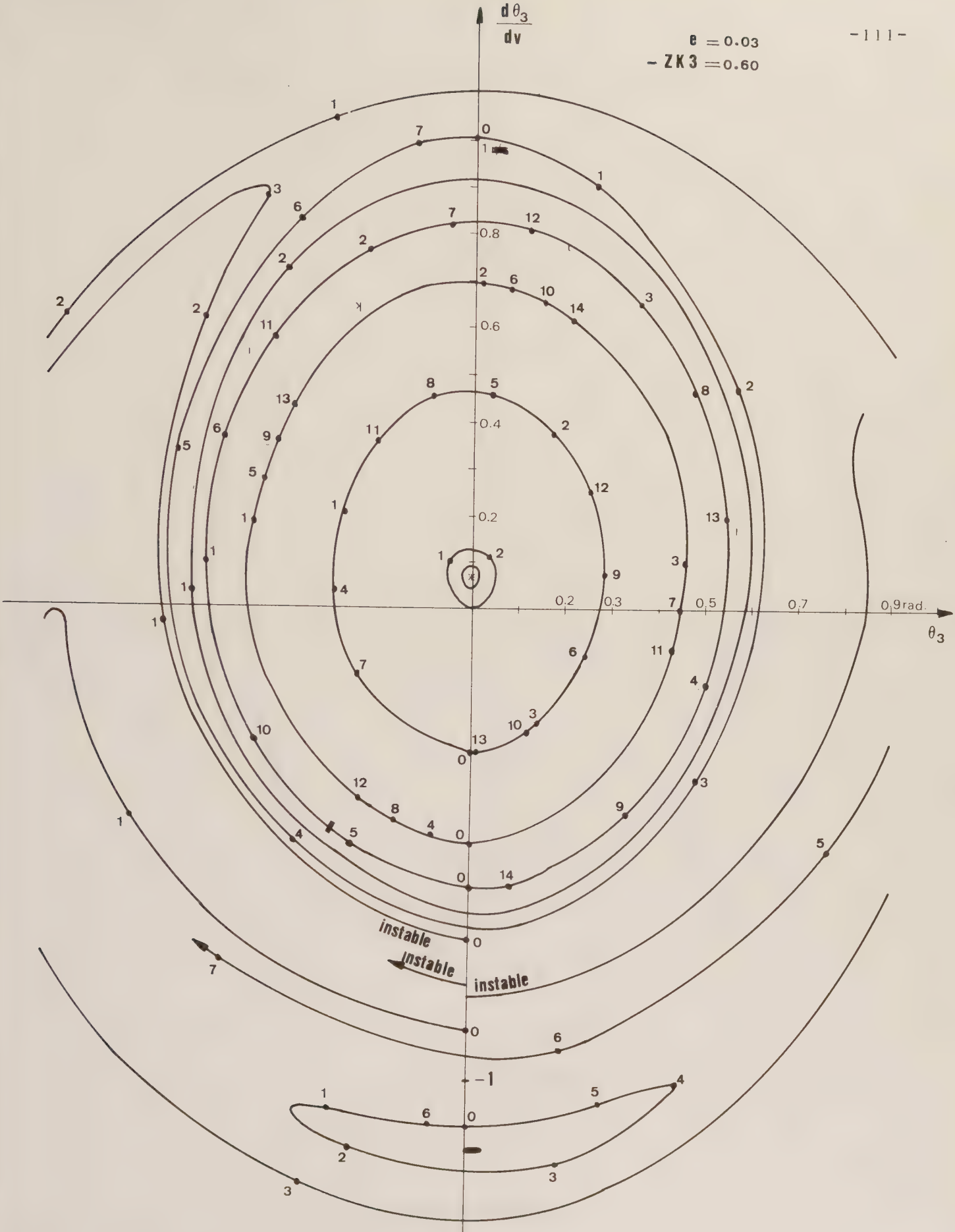

$\frac{d\theta_3}{dv}$
e = 0.03
- ZK3 = 0.60
0.8
0.6
0.4
0.2
0.2
0.3
0.5
0.7
0.9rad.
θ_3
instable
instable
instable
-1

Figure 39

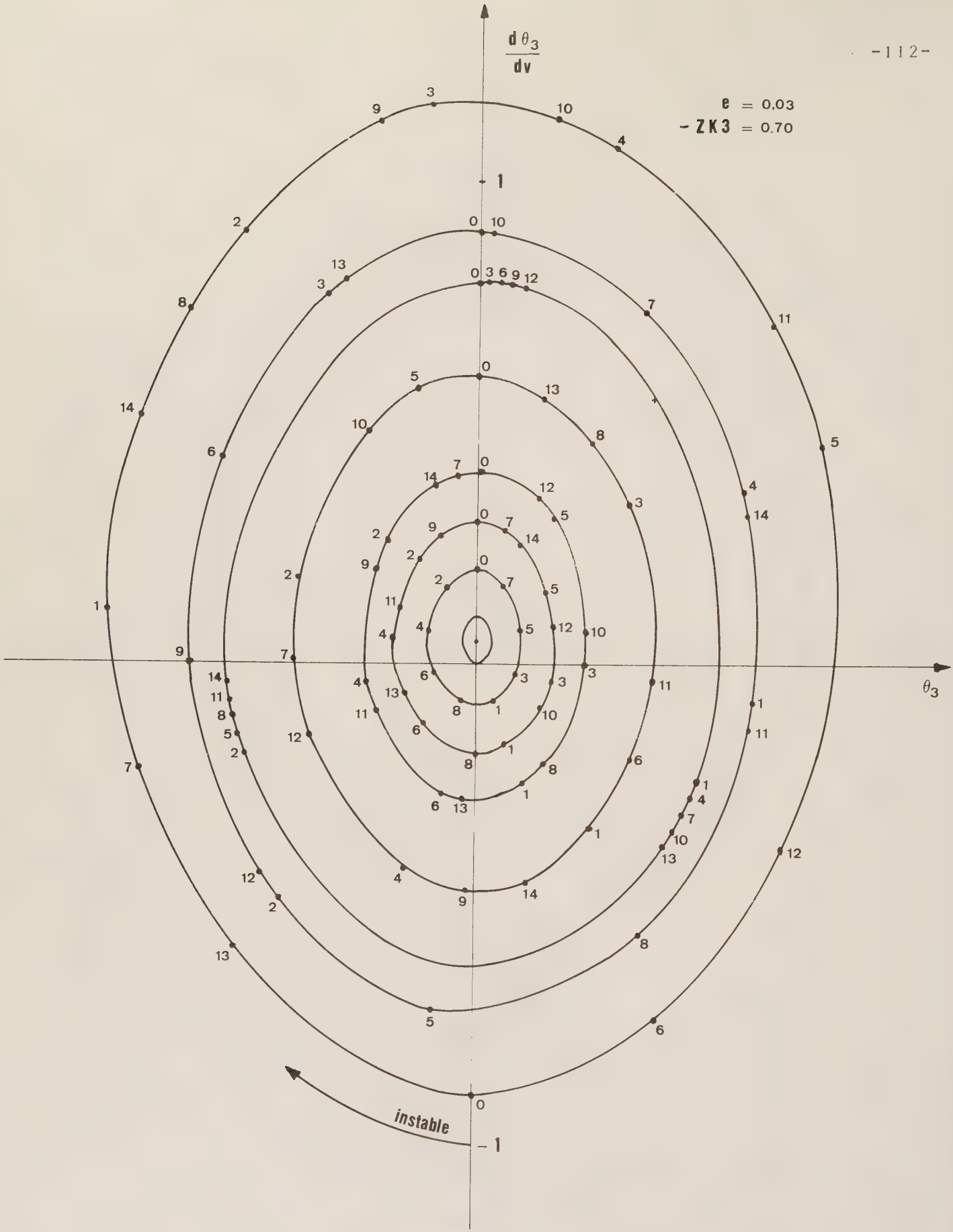


Figure 40

AMPLITUDE des DIFFERENTES SOLUTIONS PERIODIQUES TROUVEES

FIGURES 30 à 40

$\varepsilon = 0.03$

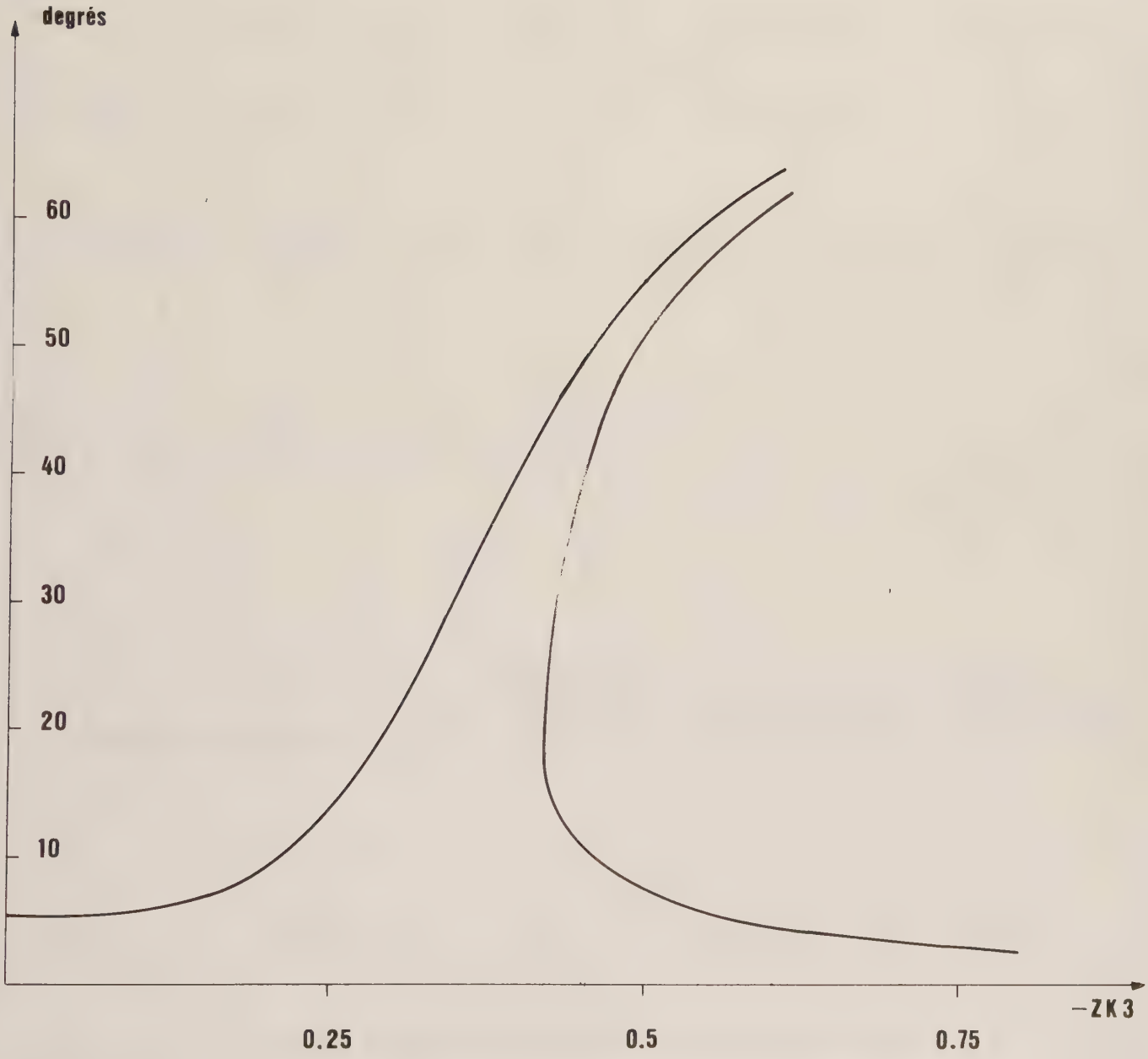


Figure 41

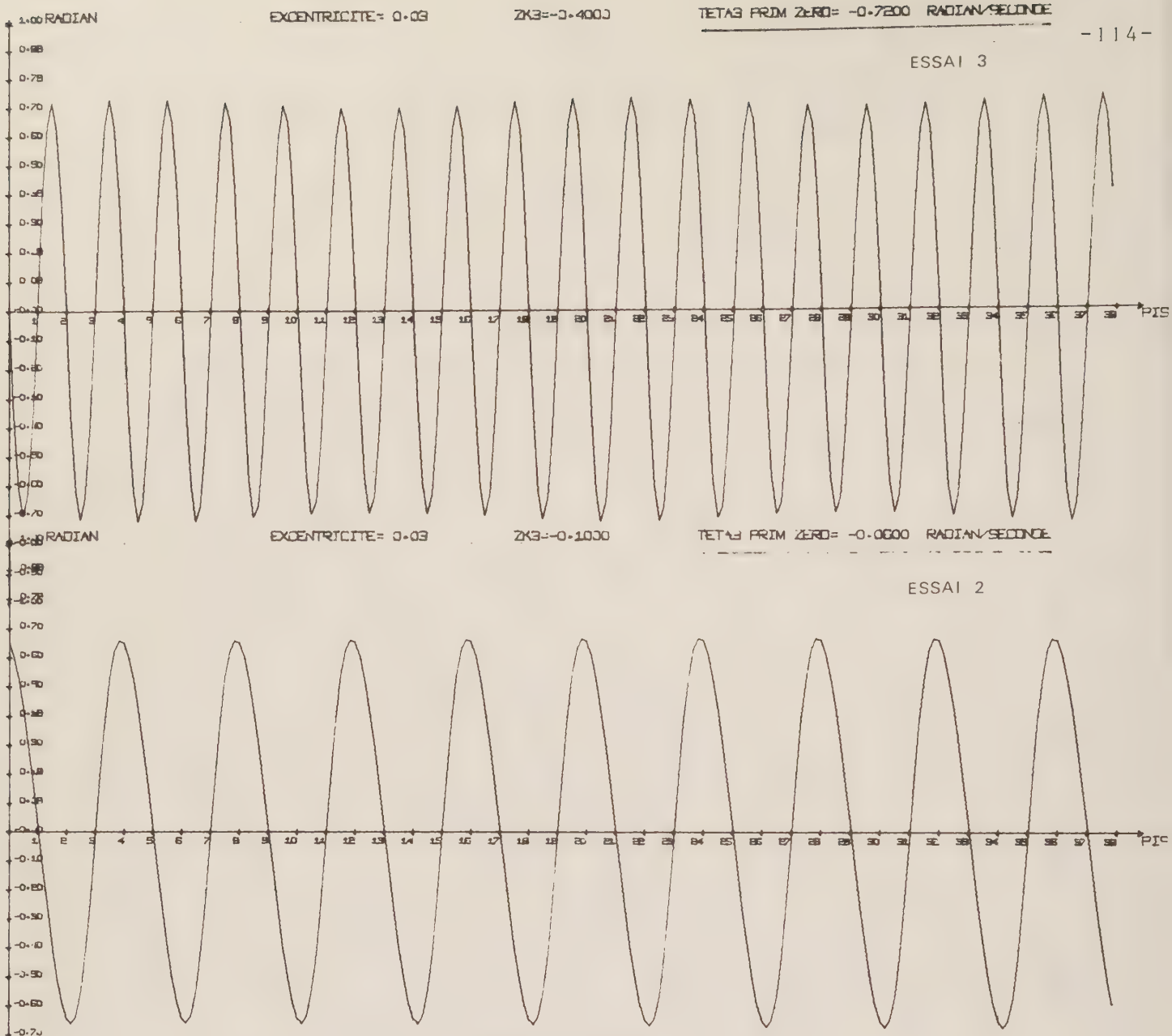
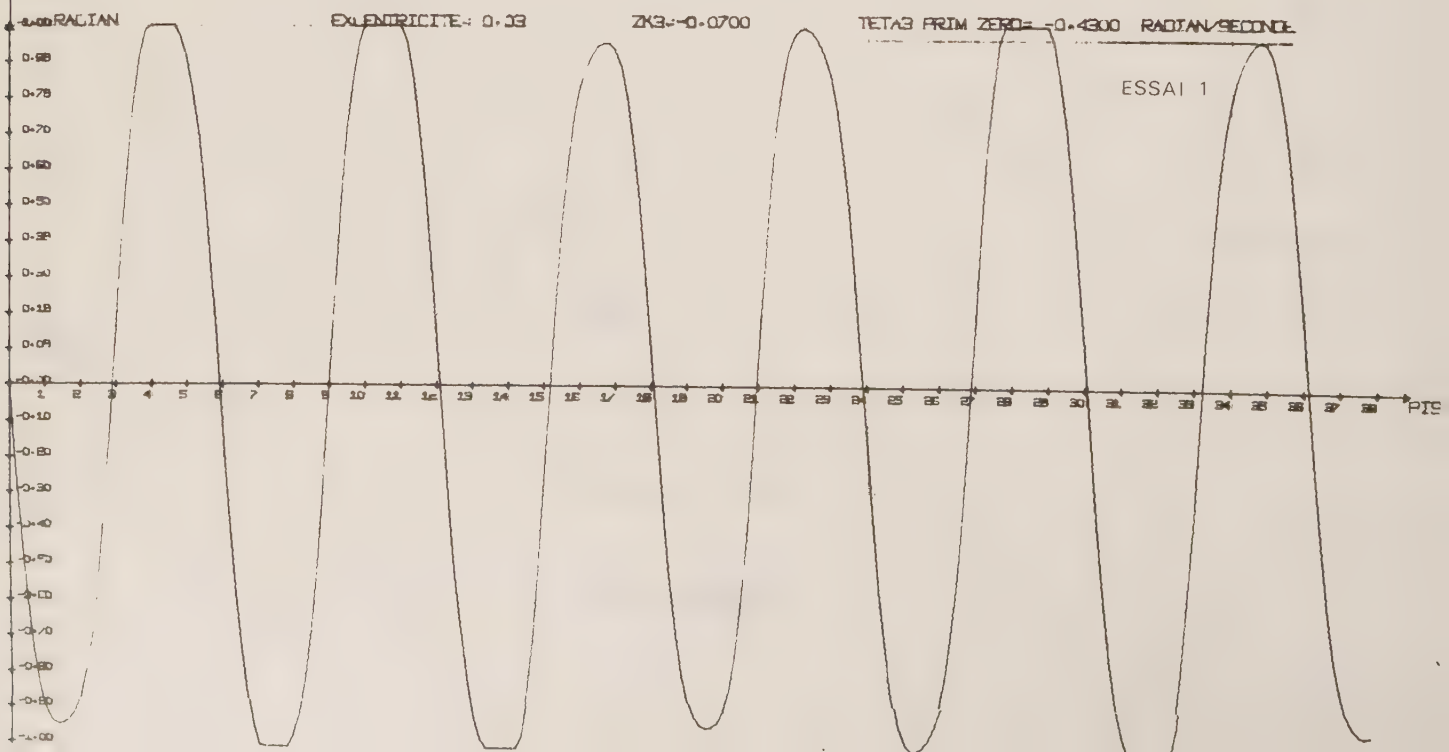
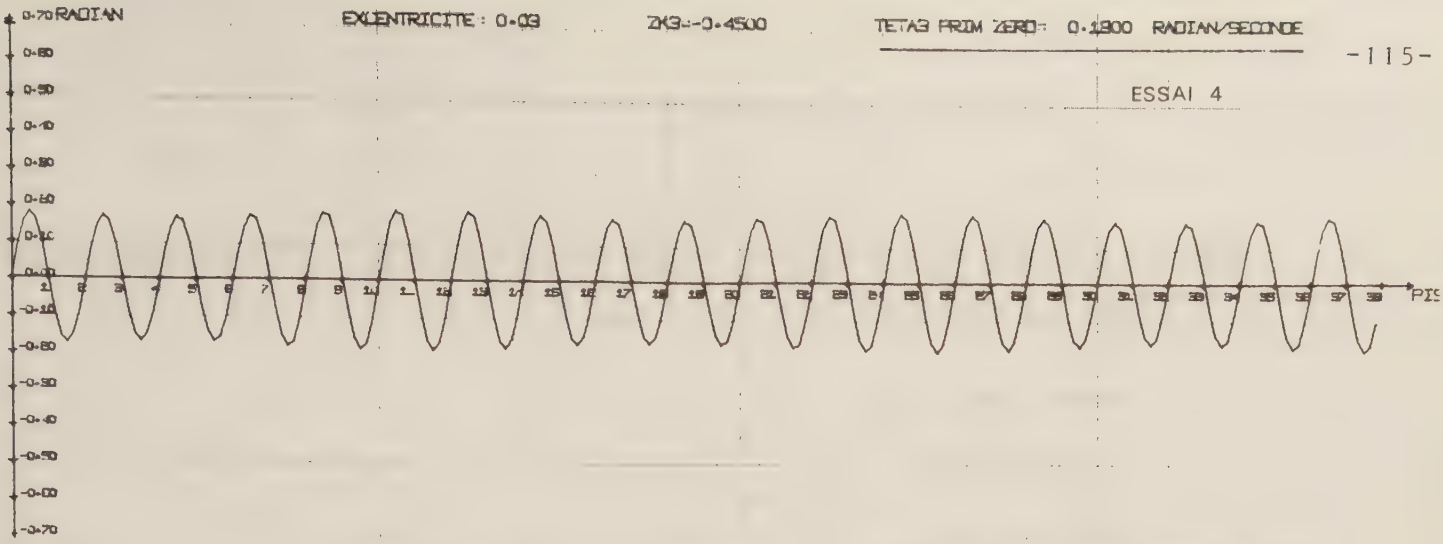

RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.4000
TETA3 PRIM ZERO= -0.7200 RADIAN/SECONDE
ESSAI 3
PIS
RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.1000
TETA3 PRIM ZERO= -0.0600 RADIAN/SECONDE
ESSAI 2
PIS

Figure 42


RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.0700
TETA3 PRIM ZERO= -0.4300 RADIAN/SECONDE
ESSAI 1
PIS


0.70 RADIAN
EXCENTRICITE : 0.03
ZK3=-0.4500
TETA3 PRIM ZERO= 0.1300 RADIAN/SECONDE
ESSAI 4

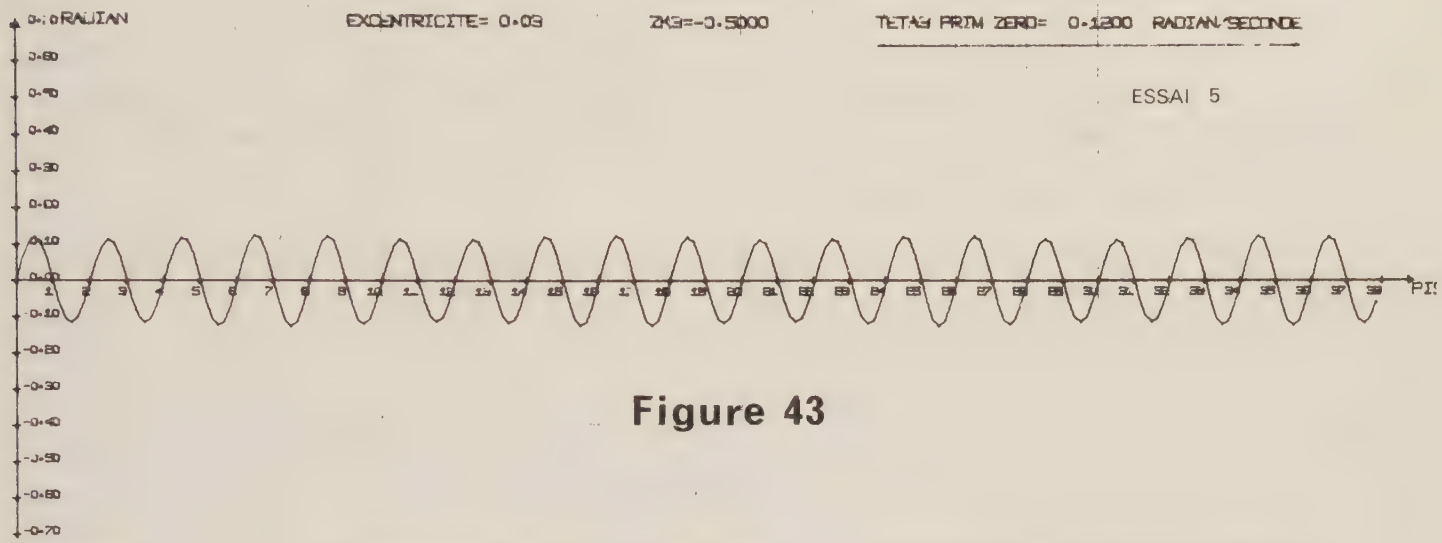
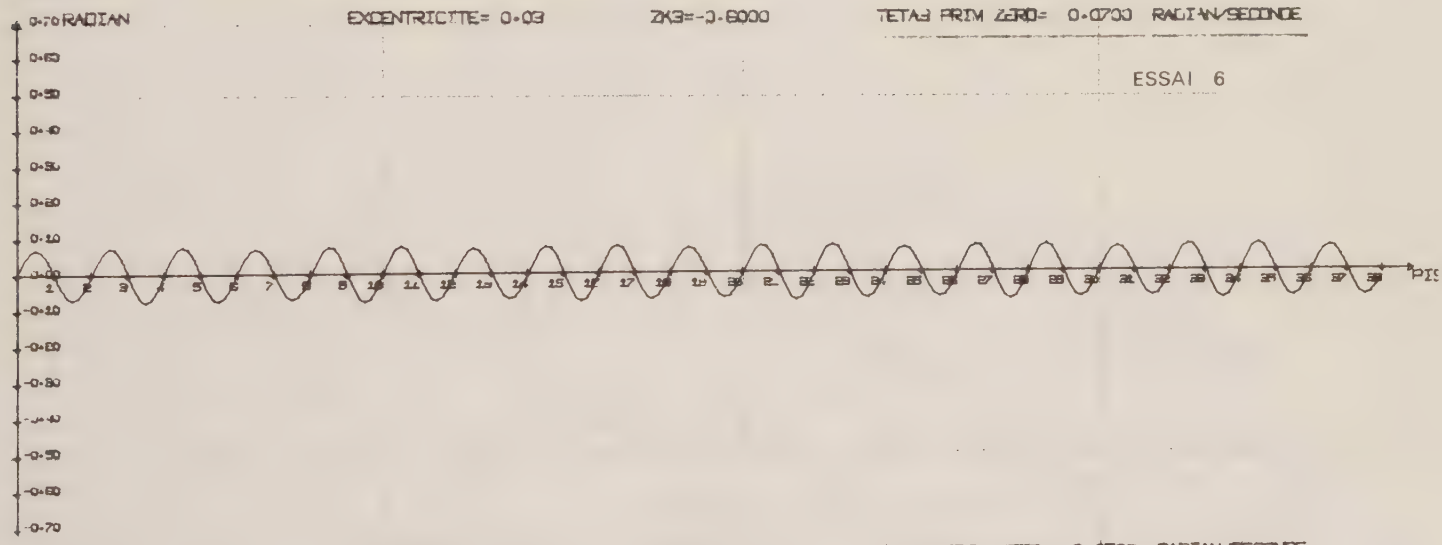
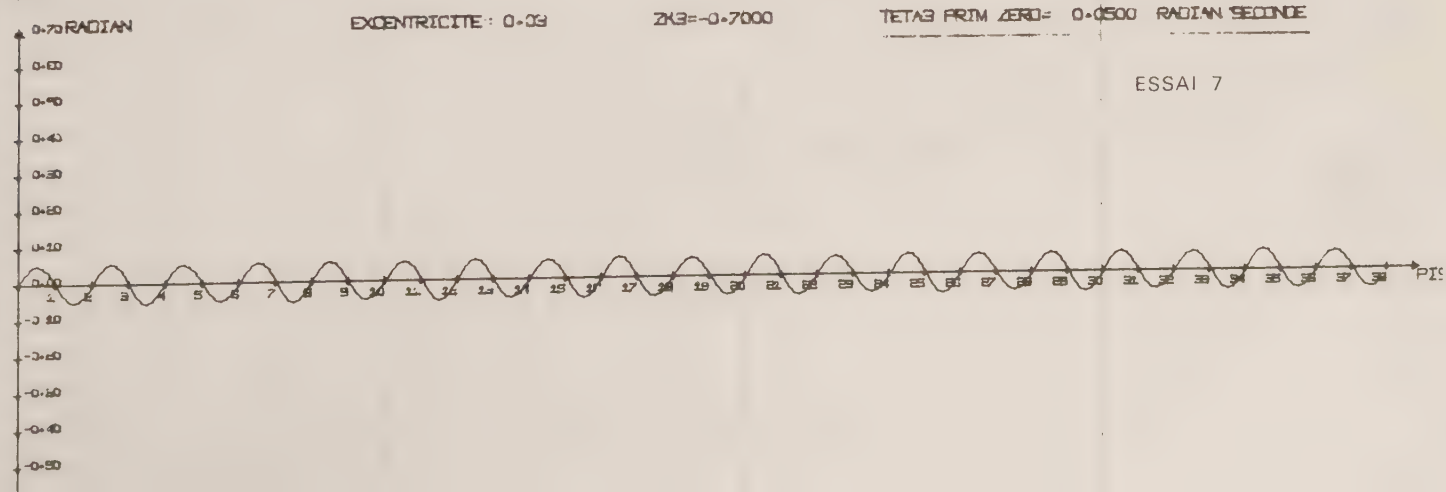

EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.5000
TETA3 PRIM ZERO= 0.1200 RADIAN/SECONDE
ESSAI 5

Figure 43


0.70 RADIAN
EXCENTRICITE= 0.03
ZK3=-0.6000
TETA3 PRIM ZERO= 0.0700 RADIAN/SECONDE
ESSAI 6


0.70 RADIAN
EXCENTRICITE : 0.03
ZK3=-0.7000
TETA3 PRIM ZERO= 0.0500 RADIAN/SECONDE
ESSAI 7

IV.4 Recherche analytique de solutions périodiques. Méthode de la "Balance harmonique". Harmoniques et sous-harmoniques

IV.4.1 Premier harmonique

Cherchons une solution de la forme

$$\theta = A \sin (V + \psi_1) \qquad \text{soit} \quad \theta_3 = \frac{A}{2} \sin (V + \psi_1)$$

Pour ce premier harmonique on doit déterminer l'amplitude de A et la phase ψ_1 en fonction de Ω^2.

Si nous utilisons le résultat connu

$$\sin \left[A \sin(V+\psi_1) \right] = 2J_1(A) \sin(V+\psi_1) + 2J_3(A) \sin 3(V+\psi_1) + 2J_5(A) \sin 5(V+\psi_1) +$$

où J_k est la fonction de Bessel de 1ère espèce, l'équation devient :

$$- A(1+e \cos V) \sin(V+\psi_1) - 2e A \sin V \cos(V+\psi_1) + 2 \Omega^2 J_1(A) \sin (V+\psi_1)$$
$$+ 2\Omega^2 J_3(A) \sin(3V+\psi_1) = 4e \sin V$$

Nous allons identifier dans cette équation les termes constants, en sin V et cos V.

$$\begin{cases} \frac{eA}{2} \sin \psi_1 = 0 \\ (2\Omega^2 J_1(A) - A) \cos \psi_1 = 4e \\ (2\Omega^2 J_1(A) - A) \sin \psi_1 = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire que $\psi_1 = 0$ ou $\psi_1 = \pi$

<u>1er cas</u> : $\psi_1 = 0$ $\qquad \theta = A \sin V$

avec Ω^2 défini par $\Omega^2 = \dfrac{A + 4e}{2J_1(A)}$

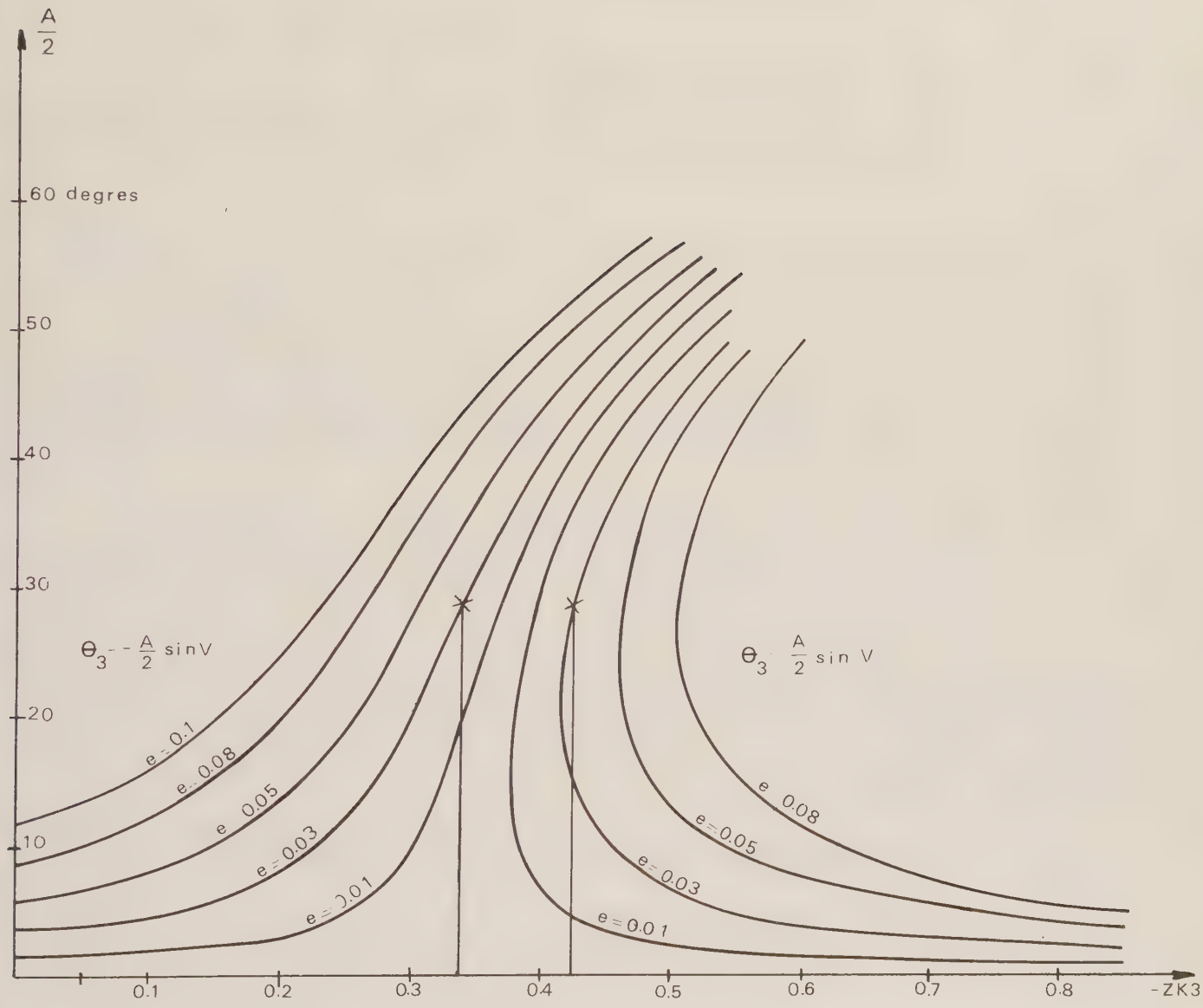
<u>2e cas</u> : $\psi_1 = \pi$ $\qquad \theta = -A \sin V$

avec Ω^2 défini par $\Omega^2 = \dfrac{A - 4e}{2J_1(A)}$

1° HARMONIQUE

$\theta = \pm A \sin V$

$\frac{A}{2} = f(\Omega^2)$



essais p.123

Figure 44

IV.4.2 Second harmonique

Cherchons une solution de la forme

$$\theta = \pm A \sin V + B \sin (2V + \psi_2)$$

L'équation devient si nous prenons d'abord le signe +

$$- (1+e \cos V) \left[A \sin V+4B \sin(2V+\psi_2) \right] - 2e \sin V \left[A \cos V+2B \cos (2V+\psi_2) \right] + \Omega^2 \sin \theta = 4e \sin V$$

Or, $\sin \theta = \sin \left[A \sin V + B \sin (2V+\psi_2) \right]$

$$= \sin (A \sin V) \cos \left[B \sin(2V+\psi_2) \right] + \cos(A \sin V) \sin \left[B \sin(2V+\psi_2) \right]$$

et :

$$\sin (A \sin V) = 2J_1(A) \sin V+2J_3(A) \sin 3V + 2J_5(A) \sin 5V +...$$

$$\cos \left[B \sin(2V+\psi_2) \right] = J_0(B) + 2J_2(B) \cos2(2V+\psi_2) + 2J_4(B) \cos4(2V+\psi_2)...$$

$$\cos (A \sin V) = J_0(A) + 2J_2(A) \cos 2V + 2J_4(A) \cos 4V + 2J_6(A) \cos 6V +...$$

$$\sin \left[B \sin(2V+\psi_2) \right] = 2J_1(B) \sin (2V+\psi_2) + 2J_3(B) \sin3(2V+\psi_2) + 2J_5(B) \sin5(2V+\psi_2)+..$$

soit :

$$\sin \theta = 2J_1(A) J_0(B) \sin V-2J_2(B)J_3(A)\sin(V+\psi_2)+2J_2(B) J_5(A) \sin(V-\psi_2)+...$$
$$+ 2J_0(A)J_1(B) \sin (2V+\psi_2) + 2J_1(B) J_2(A) \sin\psi_2- 2J_1(B)J_4(A) \sin (2_V-\psi_2)$$
$$+ 2J_3(B) J_4(A) \sin (2V+\psi_2)$$

Comme précédemment, identifions les termes constants, en sin V et cos V, en sin 2V et cos 2V.

$$2\Omega^2 J_1(B) J_2(A) \sin\psi_2 = 0$$

$$- (A+4e) + 2\Omega^2 \left[J_1(A) J_0(B) + \cos\psi_2 J_2(B) \{ J_5(A) - J_3(A) \} \right] = 0$$

$$2\Omega^2 J_2(B) \left[J_3(A) + J_5(A) \right] \sin\psi_2 = 0$$

$$-\frac{3eA}{2} - 4B\cos\psi_2 + 2\Omega^2 J_1(B)\cos\psi_2\left[J_0(A)-J_4(A)\right] + 2\Omega^2 J_3(B)\,J_4(A)\cos\psi_2 = 0$$

$$-4B\sin\psi_2 + 2\Omega^2 J_1(B)\sin\psi_2\left[J_0(A)+J_4(A)\right] + 2\Omega^2 J_3(B)\,J_4(A)\sin\psi_2 = 0$$

Si l'on suppose $B \neq 0$, $\sin\psi_2 = 0$, soit $\psi_2 = 0$ ou $\psi_2 = \pi$

<u>1er cas</u> : $\psi_2 = 0$ $\psi_1 = 0$ $\theta = A \sin V + B \sin 2V$

$$\begin{cases} -(A+4e) + 2\Omega^2\left[J_1(A)\,J_0(B) + J_2(B)\left\{J_5(A) - J_3(A)\right\}\right] = 0 \\ -4B - \dfrac{3eA}{2} + 2\Omega^2 J_1(B)\left[J_0(A) - J_4(A)\right] + 2\Omega^2 J_3(B)\,J_4(A) = 0 \end{cases}$$

<u>2e cas</u> : $\psi_2 = \pi$ $\psi_1 = 0$ $\theta = A \sin V - B \sin 2V$

$$\begin{cases} -(A+4e) + 2\Omega^2\left[J_1(A)\,J_0(B) + J_2(B)\left\{J_5(A) - J_3(A)\right\}\right] = 0 \\ +4B - \dfrac{3eA}{2} - 2\Omega^2 J_1(B)\left[J_0(A) - J_4(A)\right] - 2\Omega^2 J_3(B)\,J_4(A) = 0 \end{cases}$$

<u>3e cas</u> : $\psi_2 = 0$ $\psi_1 = \pi$ $\theta = -A \sin V + B \sin 2V$

$$\begin{cases} A-4e+2\Omega^2\left[J_2(B)\left\{J_3(A) - J_5(A)\right\} - J_1(A)J_0(B)\right] = 0 \\ -4B + \dfrac{3eA}{2} + 2\Omega^2 J_1(B)\left[J_0(A) - J_4(A)\right] + 2\Omega^2 J_3(B)\,J_4(A) = 0 \end{cases}$$

<u>4e cas</u> : $\psi_2 = \pi$ $\psi_1 = \pi$ $\theta = -A \sin V - B \sin 2V$

$$\begin{cases} A-4e+2\Omega^2\left[J_2(B)\left\{J_3(A) - J_5(A)\right\} - J_1(A)J_0(B)\right] = 0 \\ 4B + \dfrac{3eA}{2} - 2\Omega^2 J_1(B)\left[J_0(A) - J_4(A)\right] - 2\Omega^2 J_3(B)\,J_4(A) = 0 \end{cases}$$

Ω^2 doit varier entre 0 et 3. Seuls les 2e et 3e cas conviennent alors (résultats numériques), soit $\theta = \pm A \sin V \mp B \sin 2V$.

La résolution de ce système de 2 équations dans chacun de ces deux cas nous conduit au graphique suivant : (remarquons que B reste très petit devant A).

$$\Theta = \pm A \sin V \mp B \sin 2V$$

$$B = f(A)$$

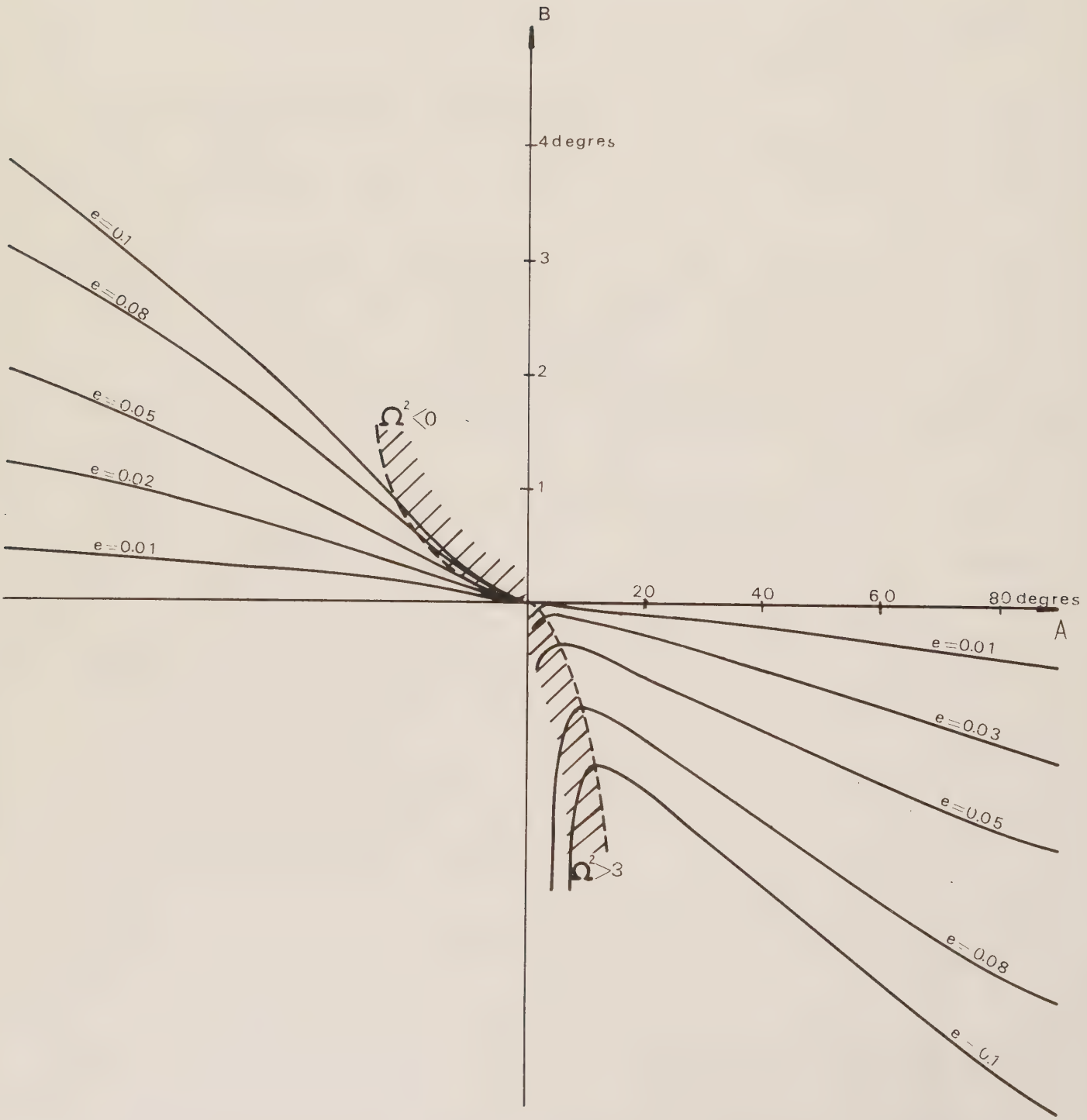


Figure 45

IV.4.3 Troisième harmonique

Nous cherchons une solution de la forme

$$\theta = \pm A \sin V \mp B \sin 2V + C \sin(3V+\psi_3)$$

Considérons tout d'abord $\theta = A \sin V - B \sin 2V + C \sin(3V+\psi_3)$
L'équation devient :

$$-(1 + e \cos V)\left[A \sin V - 4B \sin 2V + 9C \sin (3V + \psi_3) \right]$$

$$- 2e \sin V \left[A \cos V - 2B \cos 2V + 3C \cos (3V + \psi_3) \right] + \Omega^2 \sin \theta = 4e \sin V$$

Or, $\sin \theta = \sin \left[A \sin V - B \sin 2V + C \sin (3V + \psi_3 \right]$

$$= \sin \left[A \sin V - B \sin 2V \right] \cos \left[C \sin(3V + \psi_3) \right] + \sin \left[C \sin(3V+\psi_3) \right] \cos \left[A \sin V - B \sin 2V\right]$$

$$\begin{aligned}
\sin\theta = {} & \cos \left[C \sin(3V+\psi_3) \right] \sin \left[A \sin V \right] \cos \left[B \sin 2V \right] \\
& - \cos \left[C \sin(3V+\psi_3) \right] \sin \left[B \sin 2V \right] \cos \left[A \sin V \right] \\
& + \sin \left[C \sin(3V+\psi_3) \right] \cos \left[A \sin V \right] \cos \left[B \sin 2V \right] \\
& + \sin \left[C \sin(3V+\psi_3) \right] \sin \left[A \sin V \right] \sin \left[B \sin 2V \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\theta = {} & -2J_0(C)\, J_2(B)\, J_1(A) \sin 3V - 2J_0(B)\, J_2(C)\, J_3(A) \sin (3V + 2\psi_3) \\
& +2J_1(A)\, J_0(B)\, J_0(C) \sin V + 2J_3(A)\, J_0(B)\, J_0(C) \sin 3V \\
& -2J_0(C)\, J_2(B)\, J_3(A) \sin V - 2J_1(B)\, J_0(A)\, J_0(C) \sin 2V + 2J_2(C)\, J_0(A) \\
& \qquad J_3(B) \sin 2\psi_3 \\
& +2J_0(C)\, J_4(A)\, J_1(B) \sin 2V + 2J_0(A)\, J_0(B)\, J_1(C) \sin (3V + \psi_3) \\
& -2J_0(A)\, J_1(C)\, J_2(B) \sin (V - \psi_3) + 2J_0(B)\, J_2(A)\, J_1(C) \sin (V + \psi_3) \\
& + 2J_1(C)\, J_1(A)\, J_1(B) \left[\sin (2V + \psi_3) - \sin \psi_3 \right] \\
& + 2J_1(B)\, J_1(C)\, J_3(A) \left[\sin (2V + \psi_3) + \sin (2V - \psi_3) \right]
\end{aligned}$$

Identifions alors les termes de même ordre.

Terme constant :

$$2\Omega^2 J_2(C)\, J_0(A)\, J_3(B) \sin 2\psi_3 - 2J_1(C)\, J_1(A)\, J_1(B) \sin\psi_3 = 0$$

Terme en sin V :

$$0 = -(A+4e)+2\Omega^2 J_0(C)\left[J_1(A)J_0(B)-J_2(B)J_3(A)\right]+2\Omega^2 J_1(C)\cos\psi_3\left[J_0(B)J_2(A)-J_0(A)J_2(B)\right]$$

Terme en sin 2V

$$\left.\begin{aligned} +4B - \frac{3eA}{2} - \frac{3eC}{2}\cos\psi_3 &+2\Omega^2 J_0(C)\left[J_1(B)J_4(A)-J_0(A)J_1(B)\right] \\ &+2\Omega^2 J_1(C)\left[J_1(A)J_1(B)+2J_1(B)J_3(A)\right]\cos\psi_3 \end{aligned}\right) = 0$$

Terme en sin 3V

$$\left.\begin{aligned} -9C\cos\psi_3 + 4e\,B &+ 2\Omega^2 J_0(C)\left[J_0(B)\,J_3(A) - J_1(A)\,J_2(B)\right] \\ &- 2\Omega^2 J_0(B)\,J_2(C)\,J_3(A)\cos 2\psi_3 \\ &+ 2\Omega^2 J_0(A)\,J_0(B)\,J_1(C)\cos\psi_3 \end{aligned}\right) = 0$$

Si l'on suppose $C \neq 0$, la première équation entraîne

$\sin\psi_3 = 0$ soit $\psi_3 = 0$ ou π

<u>1er cas</u> : $\psi_1 = 0$ $\psi_2 = \pi$ $\psi_3 = 0$

soit $\theta = A \sin V - B \sin 2V + C \sin 3V$

A, B, C sont donnés en fonction de Ω^2 par

$$-(A+4e)+2\Omega^2\left[J_0(C)\{J_1(A)J_0(B)-J_2(B)J_3(A)\}+J_1(C)\{J_0(B)J_2(A)-J_0(A)J_2(B)\}\right] = 0$$

ou $$-(A+4e)+2\Omega^2\left[J_0(C)\{J_1(A)J_0(B)-J_2(B)J_3(A)\}-J_1(C)\{-J_0(B)J_2(A)+J_0(A)J_2(B)\}\right] = 0$$

$$+4B - \frac{3}{2}e(A+C)+2\Omega^2\left[J_0(C)\{J_1(B)J_4(A)-J_0(A)J_1(B)\}+J_1(C)\{J_1(A)J_1(B)+2J_1(B)J_3(A)\}\right] = 0$$

ou $$+4B - \frac{3}{2}e(A+C)-2\Omega^2\left[J_1(B)\{J_0(A)J_0(C)-J_0(C)J_4(A) -J_1(C)\,J_1(A)-2J_1(C)J_3(A)\}\right] = 0$$

$$-9C+4eB+2\Omega^2\left[J_0(C)\{J_0(B)J_3(A)-J_1(A)J_2(B)\}+J_0(B)\{J_0(A)J_1(C)-J_2(C)J_3(A)\}\right] = 0$$

2e cas : $\psi_1 = 0 \qquad \psi_2 = \pi \qquad \psi_3 = \pi$

$$\theta = A \sin V - B \sin 2V - C \sin 3V$$

$$\begin{cases} -(A+4e)+2\Omega^2\left[J_0(C)\{J_1(A)J_0(B)-J_2(B)J_3(A)\} - J_1(C)\{J_0(B)J_2(A)-J_0(A)J_2(B)\}\right] = 0 \\ 4B-\frac{3}{2}\,e\,(A-C)+2\Omega^2\left[J_0(C)\{J_1(B)J_4(A)-J_0(A)J_1(B)\}-J_1(C)\{J_1(A)J_1(B)+2J_1(B)J_3(A)\}\right]=0 \\ 9C+4eB+2\Omega^2\left[J_0(C)\{J_0(B)J_3(A)-J_1(A)J_2(B)\}-J_0(B)\{J_0(A)J_1(C)+J_2(C)J_3(A)\}\right] = 0 \end{cases}$$

3e cas : $\psi_1 = \pi \qquad \psi_2 = 0 \qquad \psi_3 = 0$

$$\theta = -A \sin V + B \sin 2V + C \sin 3V$$

$$\begin{cases} A-4e-2\Omega^2\left[J_0(C)\{J_1(A)J_0(B)-J_2(B)J_3(A)\}-J_1(C)\{J_0(B)J_2(A)-J_0(A)J_2(B)\}\right] = 0 \\ -4B+\frac{3}{2}\,e\,(A-C)-2\Omega^2\left[J_0(C)\{J_1(B)J_4(A)-J_0(A)J_1(B)\}-J_1(C)\{J_1(A)J_1(B)+2J_1(B)J_3(A)\}\right]= 0 \\ -9C-4eB-2\Omega^2\left[J_0(C)\{J_0(B)J_3(A)-J_1(A)J_2(B)\}-J_0(B)\{J_0(A)J_1(C)+J_2(C)J_3(A)\}\right] = 0 \end{cases}$$

4e cas : $\psi_1 = \pi \qquad \psi_2 = 0 \qquad \psi_3 = \pi$

$$\theta = -A \sin V + B \sin 2V - C \sin 3V$$

$$\begin{cases} A-4e-2\Omega^2\left[J_0(C)\{J_1(A)J_0(B)-J_2(B)-J_2(B)J_3(A)\} + J_1(C)\{J_0(B)J_2(A)-J_0(A)J_2(B)\}\right]= 0 \\ -4B+\frac{3e}{2}\,(A+C) + 2\Omega^2\left[J_1(B)\{J_0(A)J_0(C)-J_0(C)J_4(A)-J_1(C)J_1(A)-2J_1(C)J_3(A)\}\right] = 0 \\ 9C-4eB-2\Omega^2\left[J_0(C)\{J_0(B)J_3(A)-J_1(A)J_2(B)\}+J_0(B)\{J_0(A)J_1(C)-J_2(C)J_3(A)\}\right] = 0 \end{cases}$$

Seuls les 1e et 4e cas donnent des possibilités d'annuler simultanément les 3 équations. C est encore inférieur à B (environ deux fois plus petit).

$$\theta = \pm A \sin V \mp B \sin 2V \pm C \sin 3V$$

Exemple : $e = 0.03$

$- A \sin V + B \sin 2V - C \sin 3V$ ($A = 1$ radian = 57°29 ; $B = 0.01395$; $C = 0.00400$) $\qquad \omega^2 \sim 1 \qquad Zk_3 = -0.33$

$A \sin V - B \sin 2V + C \sin 3V$ ($A = 1$ = 57°29 ; $B = 0.01495$; $C = 0.00650$) $\qquad \omega^2 \sim 1.27 \qquad Zk_3 = -0.425$

θ_3 a pour amplitude moitié (voir fig.44 page 117)

IV.4.4 Sous-harmonique

Cherchons une solution de la forme :

$$\theta = A_1 \cos\left(\frac{V}{2} + \psi_0\right)$$

En utilisant la relation

$$\sin(A_1 \cos\psi) = 2 J_1(A_1) \cos\psi - 2J_3(A_1) \cos 3\psi$$

l'équation devient :

$$-(1+e\cos V)\frac{A_1}{4}\left[\cos\frac{V}{2}\cos\psi_0 - \sin\frac{V}{2}\sin\psi_0\right] + A_1 e \sin V\left[\sin\frac{V}{2}\cos\psi_0 + \sin\psi_0\cos\frac{V}{2}\right]$$
$$+ \Omega^2 \sin(A_1\cos\psi) = 4e \sin V$$

En identifiant les termes en $\sin\frac{V}{2}$ et $\cos\frac{V}{2}$, nous obtenons deux relations qui permettent de relier A_1 à Ω^2.

$$\left[\frac{A_1}{4} + \frac{3eA_1}{8} - 2\Omega^2 J_1(A_1)\right] \sin\frac{V}{2}\sin\psi_0 = 0$$

$$\left[-\frac{A_1}{4} + \frac{3eA}{8} + 2\Omega^2 J_1(A_1)\right] \cos\frac{V}{2}\cos\psi_0 = 0$$

si $\sin\psi_0 = 0$ $\quad\theta = \pm A_1 \cos\frac{V}{2}$ $\quad$ avec A_1 défini par :

$$\Omega^2 = \frac{A_1\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8}e\right)}{2 J_1(A_1)}$$ courbe (1) sur figure 46

si $\cos\psi_0 = 0$ $\quad\theta = \pm A_1 \sin\frac{V}{2}$ $\quad$ avec A_1 défini par :

$$\Omega^2 = \frac{A_1\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}e\right)}{2 J_1(A_1)}$$ courbe (2) sur figure 46

La courbe suivante représente la condition d'existence numérique d'une ou de trois solutions. fig.47 page 131.

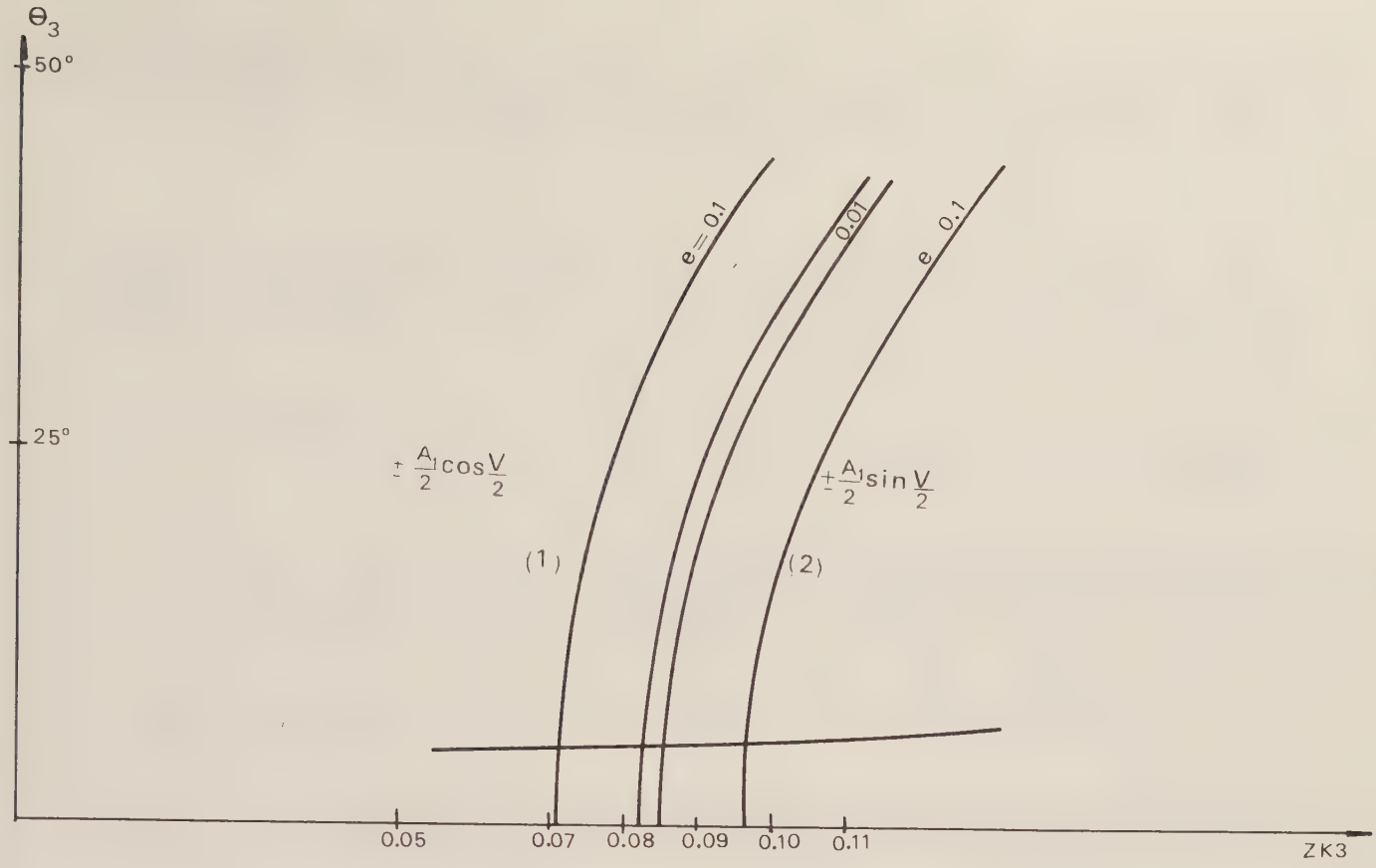
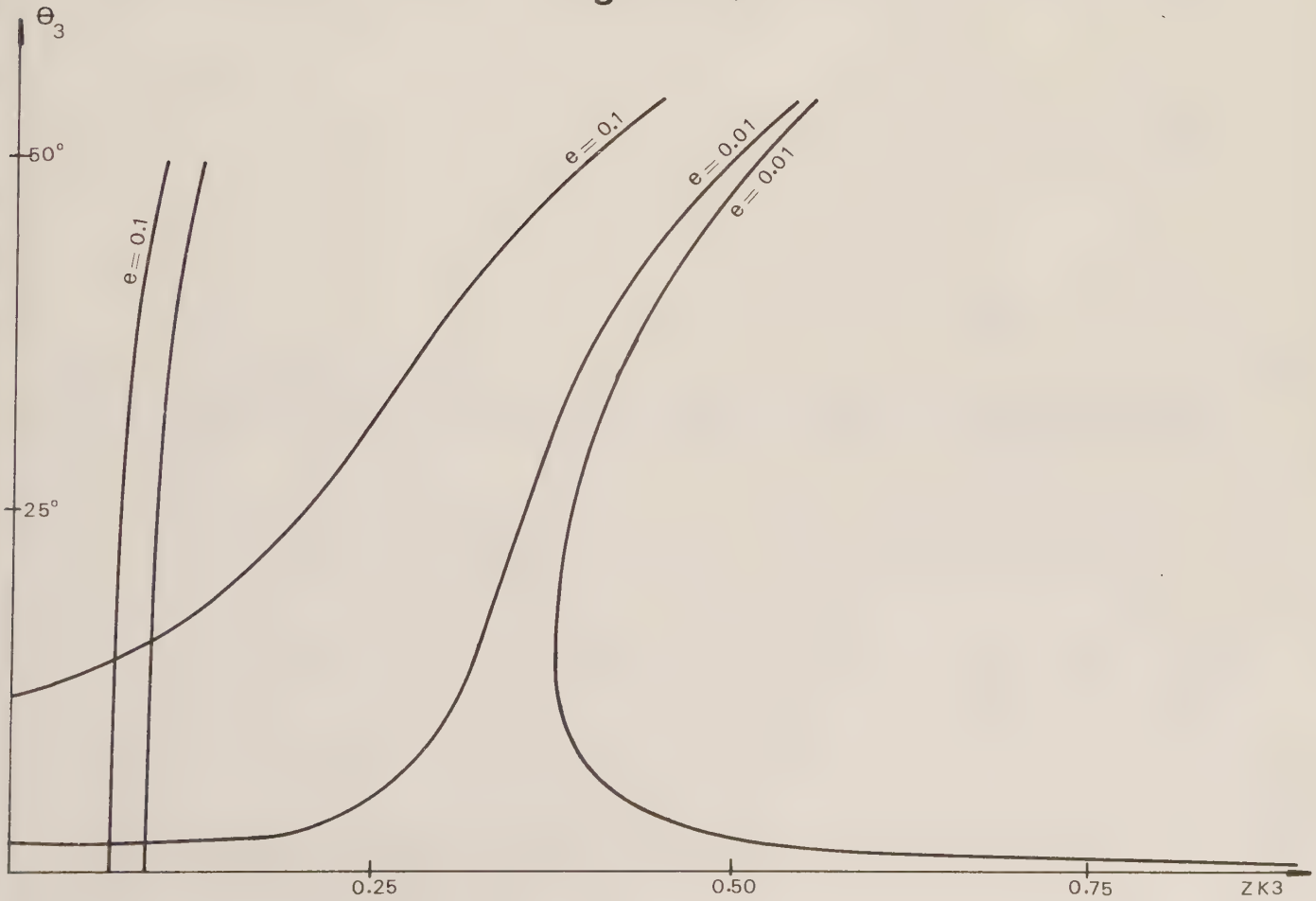

Θ_3
50°
25°
$\pm \frac{A_1}{2} \cos \frac{V}{2}$
$\pm \frac{A_1}{2} \sin \frac{V}{2}$
e=0.1
0.01
e 0.1
(1)
(2)
0.05
0.07
0.08
0.09
0.10
0.11
ZK3

Figure 46


Θ_3
50°
25°
e=0.1
e=0.1
e=0.01
e=0.01
0.25
0.50
0.75
ZK3

IV.5 Méthode de Bogoliubov et Mitropolski. Influence en première approximation de la force externe 4e sin V sur le mouvement du système.

Nous suivrons pour cette étude la méthode de Bogoliubov et Mitroposlki développée dans "Asymptotics Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations" (Hindustan Publishing corp India 1961) et plus particulièrement une application traitée dans ce livre pages 303 à 306.

Nous savons, et cela résulte également de considérations physiques, que la différence entre la pulsation propre et celle de l'oscillation forcée a une influence majeure sur l'amplitude et la fréquence des mouvements.

Nous introduirons donc cette différence dans les équations aux variations (IV.5.2) définissant l'amplitude et la phase de la solution.
Comme Mitropolski et Bogoliubov, nous pouvons mettre l'équation (IV.1.3) sous la forme suivante :

$$(IV.5.1)\quad \frac{d^2\Theta}{dV^2} + \Omega^2\,\Theta = e\left(4\sin V + \frac{2d\Theta}{dV}\sin V - \frac{d^2\Theta}{dV^2}\cos V\right) + \Omega^2\left(\Theta - \sin\Theta\right)$$

Si la force externe (4e sin V) de même que les termes non linéaires sont très petits, l'oscillation sera voisine d'une solution harmonique.

Considérons alors le second membre comme $\varepsilon f(V,\theta, \frac{d\Theta}{dV}, \frac{d^2\Theta}{dV^2})$ avec ε petit, et recherchons en première approximation une solution du type

$$\Theta = a\cos\psi \qquad \text{avec } \psi = V + \phi$$

solution correspondant à l'excitation externe.

a et ϕ devront satisfaire à :

$$(IV.5.2)\quad \begin{cases} \frac{da}{dV} = \varepsilon A_1(a,\phi) \\ \frac{d\phi}{dV} = \Omega - 1 + \varepsilon B_1(a,\phi) \end{cases}$$

Il faut alors déterminer A_1 et B_1 de telle sorte que la solution se présente effectivement sous la forme $\Theta = a(V)\cos(V + \phi(V))$ et vérifie l'équation différentielle (IV.5.1).

Pour les déterminer nous procédons de la façon suivante :

$$\frac{d\Theta}{dV} = \frac{da}{dV}\cos\psi - a\sin\psi\frac{d\psi}{dV} = \varepsilon A_1\cos\psi - a\Omega\sin\psi - \varepsilon a\sin\psi B_1$$

$$\frac{d^2\Theta}{dV^2} = \varepsilon(\Omega-1)\frac{\partial A_1}{\partial\phi} - 2A_1\varepsilon\Omega\sin\psi - a\Omega\cos\psi(\Omega+\varepsilon B_1) - a\cos\psi\,\varepsilon\Omega B_1 - a(\Omega-1)\varepsilon\sin\psi\frac{\partial B_1}{\partial\phi}$$

$$= \varepsilon\left((\Omega-1)\frac{\partial A_1}{\partial\phi} - 2a\Omega B_1\right)\cos\psi - a\Omega^2\cos\psi - \varepsilon\left(a(\Omega-1)\frac{\partial B_1}{\partial\phi} + 2\Omega A_1\right)\sin\psi$$

Ces quantités ne tiennent compte que des termes du 1er ordre en ε.
Le membre de gauche de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$\frac{d^2\Theta}{dV^2} + \Omega^2\,\Theta = \varepsilon\left[(\Omega-1)\,\frac{\partial A_1}{\partial\phi} - 2a\,\Omega\,B_1\right]\cos\psi - \varepsilon\left[(\Omega-1)a\,\frac{\partial B_1}{\partial\phi} + 2\,\Omega\,A_1\right]\sin\psi$$

Le membre de droite devient, en s'arrêtant également au 1er ordre en ε :

$$\varepsilon f(\psi-\phi,\ a\cos\psi,\ -a\,\Omega\sin\psi,\ -a\,\Omega^2\cos\psi) =$$

$$e\left[4\sin(\psi-\phi) - 2a\,\Omega\sin\psi\sin(\psi-\phi) + a\,\Omega^2\cos\psi\cos(\psi-\phi)\right] + \Omega^2\left[a\cos\psi - \sin(a\cos\psi)\right]$$

Comme on ne peut trouver un ε commun dans le second membre, il est plus intéressant d'appeler $\varepsilon f = f_0$ toute cette quantité et de définir comme Bogoliubov et Mitropolski, page 304, le développement en série de Fourier de cette fonction périodique, de période 2π en ψ.
Il ne reste plus qu'à identifier les termes du même ordre et correspondant à des harmoniques identiques. (cf Bogoliubov et Mitropolski, p.305).
Nous obtenons alors :

$$\text{(IV.5.3)}\quad \begin{cases} \varepsilon\left[(\Omega-1)\,\dfrac{\partial A_1}{\partial\phi} - 2a\,\Omega\,B_1\right] = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_0\cos\psi\,d\psi \\ \varepsilon\left[a(\Omega-1)\,\dfrac{\partial B_1}{\partial\phi} + 2\,\Omega\,A_1\right] = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_0\sin\psi\,d\psi \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \varepsilon\left[(\Omega-1)\,\dfrac{\partial A_1}{\partial\phi} - 2a\,\Omega\,B_1\right] = -4e\sin\phi + a\,\Omega^2 - 2\,\Omega^2\,J_1(a) \\ \varepsilon\left[a(\Omega-1)\,\dfrac{\partial B_1}{\partial\phi} + 2\,\Omega\,A_1\right] = -4e\cos\phi \end{cases}$$

$J_1(a)$ est la fonction de Bessel de 1ère espèce.

Nous pouvons alors déterminer A_1 et B_1 convenant au problème :

$$\text{(IV.5.4)}\quad \begin{cases} \varepsilon A_1(a,\phi) = -\dfrac{4e}{\Omega+1}\cos\phi \\ \varepsilon B_1(a,\phi) = \dfrac{4e}{a(\Omega+1)}\sin\phi - \dfrac{\Omega}{2} + \dfrac{\Omega}{a}\,J_1(a) \end{cases}$$

Les équations de 1ère approximation définissant a et ϕ s'écrivent alors :

$$(IV.5.5)\qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dV} = -\dfrac{4e}{\Omega+1}\cos\phi \\ \dfrac{d\phi}{dV} = \left(\dfrac{\Omega}{2} + \dfrac{\Omega}{a}J_1(a)\right) - 1 + \dfrac{4e}{a(\Omega+1)}\sin\phi \end{cases}$$

La forme même des seconds membres (variables a et ϕ séparées) nous incite à voir s'il n'existerait pas une fonction telle que ces quantités en seraient les dérivées partielles par rapport à a ou à ϕ. C'est le cas si

$$H = \frac{4e\alpha}{\Omega+1}\sin\phi + \Omega\left(\frac{a^2}{4} - (J_0(a) - 1)\right) - \frac{a^2}{2}$$

$$(IV.5.6)\qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dV} = -\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial H}{\partial \phi} \\ \dfrac{d\phi}{dV} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial H}{\partial a} \end{cases}$$

H n'étant pas une fonction explicite de V, $H = H_0$ est une intégrale première du système.
Cette relation nous permet de définir un lien existant entre a(V) et ϕ(V).

$$\frac{4e}{\Omega+1}\alpha\sin\phi + \Omega\left(\frac{a^2}{4} - (J_0(a) - 1)\right) - \frac{a^2}{2} = H_0$$

Nous pouvons tirer sin ϕ en fonction de a en posant $K_0 = \dfrac{H_0}{\Omega+1}$.

$$(IV.5.7)\qquad \sin\phi = \frac{K_0 - (\Omega^2-1)\frac{a^2}{2} + \Omega(\Omega+1)\frac{a^4}{64}}{4e\ a}$$

Car $J_0(a) = 1 - \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^4}{64}$

Cette relation (IV.5.7) montre que les courbes intégrales représentées dans le plan (a,ϕ) sont symétriques par rapport au droites $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$. Si il existe des courbes fermées pour certaines valeurs de K_0, elles entoureront des points des droites $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$.

En revenant au système (IV.5.5), nous pouvons déterminer l'ordonnée de ces points, c'est-à-dire l'amplitude des mouvements périodiques en a sin V.

$$\left(\frac{\Omega}{2} + \frac{\Omega}{a}J_1(a)\right) - 1 \pm \frac{4e}{a(\Omega+1)} = 0$$

Soit : $$a(\Omega+1)\left(\frac{\Omega}{2} + \frac{\Omega}{a} J_1(a)\right) - a(\Omega+1) \pm 4e = 0$$

ou encore

(IV.5.8) $$\Omega J_1(a) + \Omega^2 J_1(a) + \frac{a\Omega}{2}(\Omega-1) = a \mp 4e$$

or $$J_1(a) = \frac{a}{2} - \frac{a^3}{16} + \ldots$$

La relation (IV.5.8) peut s'écrire encore :

$$2\Omega^2 J_1(a) + \Omega(\Omega-1)\left(\frac{a}{2} - J_1(a)\right) = a \mp 4e$$

IV.5.9 $$2\Omega^2 J_1(a) + \Omega(\Omega-1)\frac{a^3}{16} = a \mp 4e$$

Si a est petit, on retrouve de façon précise les résultats du paragraphe IV.4.1. Ce calcul nous permet de définir, avec plus de précision, quelles sont les valeurs de e et Ω^2 qui entrainent l'existence d'une seule ou de trois solutions périodiques.

L'équation IV.5.9 peut être ordonnée selon les puissances décroissantes de a. Nous obtenons alors une relation du 3e degré :

$$a^3\left(\frac{\Omega^2+1}{16}\right) a(\Omega^2-1) = \mp 4e$$

qui peut s'écrire plus classiquement :

$$a^3 + \left(-\frac{16(\Omega^2-1)}{\Omega^2+1}\right) a \pm \frac{64e}{\Omega^2+1} = 0$$

Cette équation n'a qu'une racine si son discriminant

$$4\left(-\frac{16(\Omega^2-1)}{\Omega^2+1}\right)^3 + 27\left(\frac{64e}{\Omega^2+1}\right)^2 > 0$$

ou en a 3 si il est négatif.

La quantité

$$-4(\Omega^2-1)^3 + 27(\Omega^2+1)e^2$$

est toujours positive si $\Omega^2 < 1$. En conséquence, quel que soit e, si $\Omega^2 < 1$, il n'y aura toujours qu'une solution périodique.
Pour qu'il y ait 3 solutions périodiques, il faut que

IV.5.10 $$e^2 < \frac{4}{27}\frac{(\Omega^2-1)^3}{\Omega^2+1}$$

Comparons aux résultats trouvés chapitre IV.4 et prenons par exemple une valeur de Ω^2 telle que si

(Ω^2 est inférieur il y a une seule solution
(Ω^2 est supérieur il y a trois solutions

Sur le graphique (47), avec $\Omega^2 = 1,5$, il y a 3 solutions si $e < 0.086$ et une seule solution si $e > 0.086$

Avec la relation IV.5.10, nous trouvons

$$e^2 < 0.0074$$

pour qu'il y ait 3 solutions soit

$$e < 0.086$$

L'approximation est donc parfaite et conforme à la méthode numérique.

Nous pouvons tracer la courbe $e = f(\Omega^2)$ qui sera la ligne de bifurcation des cas où il existe une seule solution ou trois solutions fig.48.

$$e^2 = \frac{4}{\Omega^2+1} \left(\frac{\Omega^2-1}{3} \right)^3$$

$$e = \frac{2}{\sqrt{\Omega^2+1}} \left(\frac{\Omega^2-1}{3} \right)^{3/2}$$

On y retrouve en pointillé les résultats numériques fig.47.

COURBES de BIFURCATION

RESULTATS NUMERIQUES

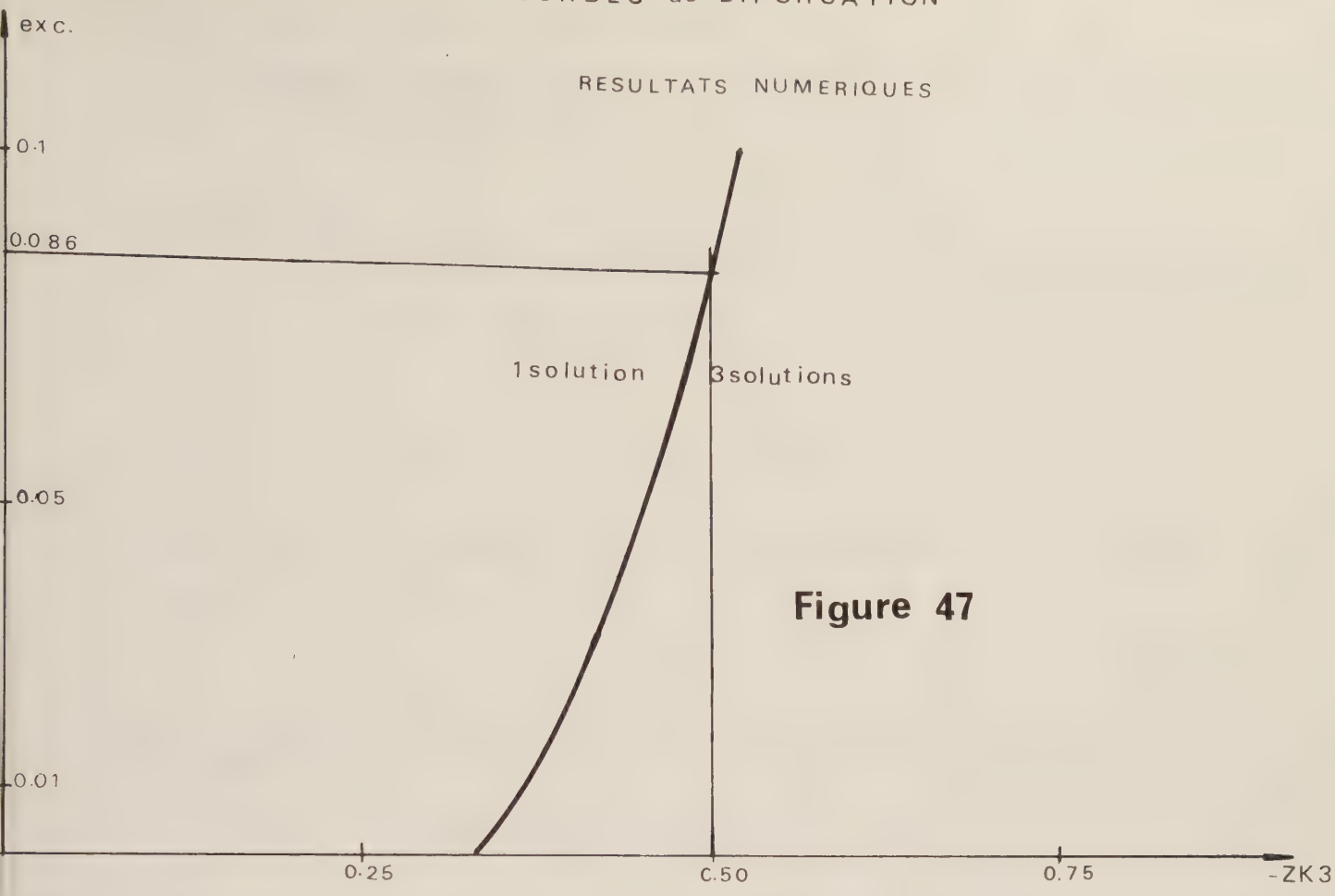


Figure 47

RESULTATS ANALYTIQUES

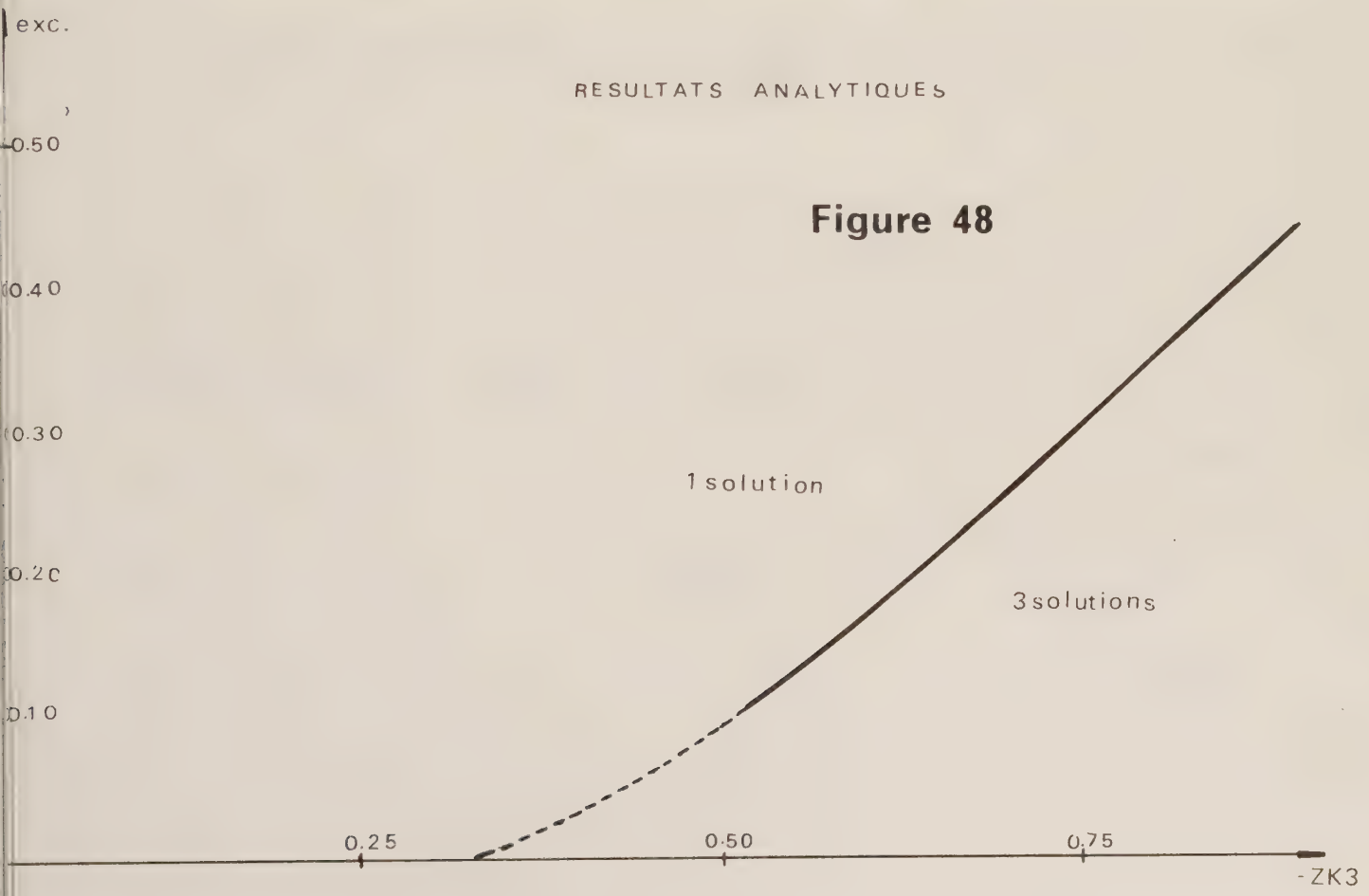


Figure 48

IV.6 Solution exacte de l'équation dans le cas d'une orbite circulaire.

Cette résolution servira de point de départ pour construire une solution de l'équation complète lorsque l'excentricité sera faible.

Si e est nul, l'équation IV.1.2 s'écrit simplement :

$$\frac{d^2\Theta_3}{dV^2} + \Omega^2 \sin\Theta_3 \cos\Theta_3 = 0 \qquad \text{(IV.6.1)}$$

En multipliant par $2\frac{d\Theta_3}{dV}$, on peut intégrer une première fois cette équation.

$$\left(\frac{d\Theta_3}{dV}\right)^2 + \Omega^2 \sin^2\Theta_3 = \text{cte} \qquad \text{(IV.6.2)}$$

Puisque nous recherchons des solutions impaires, nous pouvons supposer qu'à l'instant initial

$$\Theta_{30} = 0 \text{ et } \left(\frac{d\Theta_3}{dV}\right)_0 \neq 0$$

$$\left(\frac{d\Theta_3}{dV}\right)^2 = \left(\frac{d\Theta_3}{dV}\right)_0^2 - \Omega^2 \sin^2\Theta_3$$

$$dV = \pm \frac{d\Theta_3}{\left(\frac{d\Theta_3}{dV}\right)_0^2 - \Omega^2 \sin^2\Theta_3}$$

Posons $k^2 = \frac{1}{\Omega^2}\left(\frac{d\Theta_3}{dV}\right)_0^2$ que nous avons vu être inférieur à 1 pour qu'il existe des oscillations (II.2.7).

Alors :

$$dV = \pm \frac{d\Theta_3}{k\,\Omega\sqrt{1 - \frac{\sin^2\Theta_3}{k^2}}}$$

Ou encore :

$$\Omega V = \pm \frac{1}{k} \int_0^{\Theta_3} \frac{d\Theta_3}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\Theta_3}{k^2}}} \qquad \text{(IV.6.3)}$$

Effectuons le changement de variable yk = sin Θ_3.

$$d\Theta_3 = \frac{k\, dy}{\sqrt{1 - k^2 y^2}}$$

IV.6.3 devient :

$$\Omega V = \pm \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}}$$

Ceci est une intégrale elliptique et nous pouvons définir la fonction elliptique

$$y = \pm\, sn(\Omega V, k)$$

soit en revenant à la variable Θ_3.

$$\sin \Theta_3 = \pm\, k\, sn(\Omega V, k)$$

c'est-à-dire :

$$\Theta_3 = \pm \arcsin\{k\, sn(\Omega V, k)\}$$

Θ_3 est périodique de période T en V de telle sorte que $T = \frac{4K(k^2)}{\Omega}$. En effet, sn(ΩV,k) est périodique de période $\frac{4K(k^2)}{\Omega}$ en V avec

$$K(k^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\Theta_3 = \pm \arcsin\{k\, sn(\frac{4K(k^2)}{T} V, k)\}$$

IV. 7 Existence de solutions périodiques par transformation de l'équation différentielle en équation intégrale du type de Hammerstein.

Diverses études numériques de cette équation différentielle ont déjà été faites. En particulier, Brereton.R.C. et MODI.V.J. ont résumé l'état des connaissances sur ce sujet dans deux publications référencées ici (*). Mais la démonstration de l'existence des solutions périodiques n'a jamais été précisée.

Nous utiliserons pour cette démonstration, la note originale de A. HAMMERSTEIN (**) et l'ouvrage de TRICOMI (***).

Rappelons les théorèmes énoncés par Hammerstein et repris par Tricomi :

L'équation intégrale :

$$\Psi(x) + \int_B K(x,y)\ f\ [y,\Psi(y)]\ dy = 0 \qquad \text{(IV.7.1)}$$

est du type de Hammerstein si

- B est un domaine fini, connexe
- K(x,y) est une fonction de carré intégrable
- K(x,y) est un noyau symétrique (K(x,y) = K(y,x))
- K(x,y) est défini positif (toutes ses valeurs propres sont positives).

---

* BRERETON.R.C. et MODI.V.J. "Periodic Solutions Associated with the Gravity-Gradient-Oriented System"
AIAA.J Vol.7 N°7.1969 pp 1217-1225 et
AIAA.J. Vol.7 N°8.1969 pp 1465-1468

** HAMMERSTEIN.A. "Nicht lineare Integralgleichungen Nebst Anwendungen"
Acta, Math. Tome 54.1930 pp 117-176

*** TRICOMI.F.G. "Integral Equations" Pure and Applied Mathematics
Vol.5 4e édition. Avril 1967.

Théorème 1. Existence (réf. Tricomi page 208 ou Hammerstein page 122)

Si le noyau K(x,y) satisfait aux conditions précédentes, et si la fonction f(x,u) est continue, sa valeur absolue étant toujours inférieure ou égale à une fonction linéaire de $|u|$ convenablement choisie, soit :

$$|f(x,u)| < C_1 |u| + C_2 \qquad (IV.7.2)$$

C_1 et C_2 étant deux constantes positives, C_1 plus petit que la plus petite des valeurs propres du noyau K(x,y), alors l'équation (IV.7.1) a au moins une solution continue.

Théorème 2. Unicité (réf. Tricomi page 212)

L'équation IV.7.1 a au plus une solution si la fonction f(x,u) satisfait à la condition de Lipschitz.

$$|f(x,u_1) - f(x,u_2)| < C_3 |u_1 - u_2| \qquad (IV.7.3)'$$

C_3 est une constante positive inférieure à la plus petite des valeurs propres de K(x,y).

Appliquons ces résultats à notre équation différentielle :

$$(1+e\cos V)\frac{d^2\theta}{dV^2} - 2e\sin V\frac{d\theta}{dV} + \Omega^2 \sin\theta = 4e\sin V \qquad (IV.7.4)$$

Dans un premier temps, effectuons le changement de variable

$$\theta = \frac{x}{1+e\cos V} \qquad (IV.7.5)$$

soit : $$\frac{d\theta}{dV} = \frac{1}{(1+e\cos V)^2}\left[(1+e\cos V)\frac{dx}{dV} + e\sin V\, x\right]$$

$$\frac{d^2\theta}{dV^2} = \frac{2e\ \sin V}{(1+e\ \cos V)^3}\left[\frac{dx}{dV}(1+e\ \cos V) + e\ \sin V\ x\right]$$

$$+ \frac{1}{(1+e\ \cos V)^2}\left[\frac{d^2x}{dV^2}(1+e\ \cos V) + e\ \cos V x\right]$$

L'équation devient :

$$\frac{2e\ \sin V}{(1+e\ \cos V)^2}\left[\frac{dx}{dV}(1+e\ \cos V) + e\ \sin V\ x\right] + \frac{1}{1+e\ \cos V}\left[\frac{d^2x}{dV^2}(1+e\ \cos V) + e\ \cos V x\right]$$

$$- \frac{2e\ \sin V}{(1+e\ \cos V)^2}\left[\frac{dx}{dV}(1+e\ \cos V) + e\ \sin V x\right] + \Omega^2 \sin\left[\frac{x}{1+e\ \cos V}\right] = 4e\ \sin V$$

soit :

$$\frac{d^2x}{dV^2} = -\frac{e\ \cos V}{1+e\ \cos V}x - \Omega^2 \sin\left[\frac{x}{1+e\ \cos V}\right] + 4e\ \sin V$$

$$\frac{d^2x}{dV^2} = f\left[V, x(V)\right] \qquad (IV.7.6)$$

Transformons maintenant cette équation en équation intégrale en utilisant une fonction de Green.

Nous supposons rechercher des fonctions périodiques impaires de période 2π.

Nous avons donc $\theta(V) = -\theta(-V)$

$\theta(o) = 0$

Si la solution est de période 2π $\quad \theta(\pi) = -\theta(-\pi) = -\theta(2\pi-\pi) = -\theta(\pi) = 0$

Le fait que la solution soit périodique de période 2π peut donc s'écrire :

$$\theta(0) = \theta(\pi) = 0$$

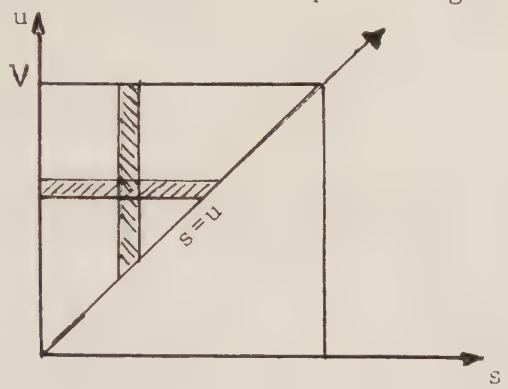
L'équation (IV.7.6) et la condition de périodicité s'écrivent :

$$\frac{d^2x}{dV^2} = f\left[V, x(V) \right] \qquad \text{avec} \quad \theta(0) = \theta(\pi) = 0$$

$$\frac{dx}{dV} = \int_0^V f\left[s,x(s)\right] ds + A$$

$$x(V) = \int_0^V \left\{ \int_0^u f\left[s,x(s)\right] ds \right\} du + AV + B$$

Cette intégrale double correspond à une intégration sur un triangle en faisant d'abord varier s puis u comme l'indique la figure ci-dessous.



Cette même opération peut donc aussi s'écrire :

$$s(V) = \int_0^V f\left[s,x(s)\right] \left\{ \int_s^V dU \right\} ds + At + B$$

soit :
$$s(V) = \int_0^V (V-s)\, f\left[s,x(s)\right] ds + At + B$$

Faisons passer cette solution par V = 0 et V = π

Si V = 0 B = 0

Si V = π $\int_0^\pi (\pi-s)\, f\left[s,x(s)\right] ds + A\pi = 0$

$$A = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi-s)\ f\ \left[s,x(s)\right]\ ds$$

$$x(V) = \int_0^{V} (V-s)\ f\ \left[s,x(s)\right] ds - \frac{V}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi-s)\ f\ \left[s,x(s)\right]\ ds$$

$$x(V) = \int_0^{V} \left|(V-s) - \frac{V}{\pi}(\pi-s)\right|\ f\ \left[s,x(s)\right]\ ds - \frac{V}{\pi}\int_V^{\pi} (\pi-s)\ f\ \left[s,x(s)\right]\ ds$$

$$x(V) = \int_0^{V} -\frac{s}{\pi}(\pi-V)\ f\ \left[s,x(s)\right]\ ds + \int_V^{\pi} -\frac{V}{\pi}(\pi-s)\ f\ \left[s,x(s)\right]\ ds$$

On peut poser :

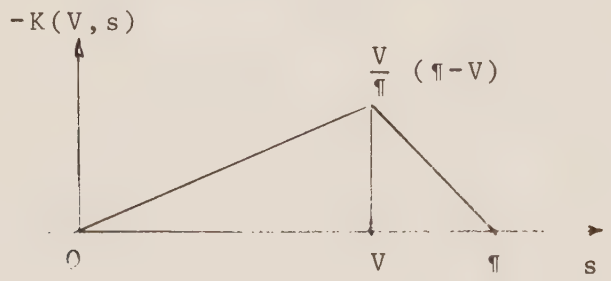
$$x(V) = \int_0^{\pi} K(V,s)\ f\ \left[s,x(s)\right]\ ds \qquad (IV.7.7)$$

$K(V,s)$ étant défini sur le carré $0 < V < \pi$, $0 < s < \pi$

par

$$\begin{cases} K(V,s) = -\frac{s}{\pi}(\pi-s) & \text{si } 0 < s < V \\ K(V,s) = -\frac{V}{\pi}(\pi-s) & \text{si } V < s < \pi \end{cases}$$

Cette intégrale est du type d'Hammerstein car $K(V,s)$ est un noyau symétrique obéissant aux conditions définies en IV.7.1



Recherchons les valeurs propres du noyau $K(V,s)$

$$f\left[V,x(V)\right] + \lambda\int_0^{\pi} K(V,s)\ f\ \left[V,x(V)\right]\ ds = 0$$

est équivalent à :

$$\frac{d^2g}{dV^2} + \lambda g = 0 \qquad (IV.7.8)$$

En effet :

$$g(V) = \int_0^{\pi} K(V,s) f\left[s,x(s)\right] ds = (\pi - V) \int_0^{V} (-) \frac{s}{\pi} f\left[s,x(s)\right] ds - \frac{V}{\pi} \int_V^{\pi} (\pi - s) f\left[s,x(s)\right] ds$$

$$g(V) = \int_0^{\pi} K(V,s) f\left[s,x(s)\right] ds = \pi \int_0^{V} (-) \frac{s}{\pi} f\left[s,x(s)\right] ds - V \int_0^{V} (-) \frac{s}{\pi} f\left[s,x(s)\right] ds$$

$$g(V) = \int_0^{\pi} K(V,s) f\left[s,x(s)\right] ds = - \int_0^{V} s f\left[s,x(s)\right] ds - V \int_V^{\pi} f\left[s,x(s)\right] ds + \frac{V}{\pi} \int_0^{\pi} s f\left[s,x(s)\right] ds$$

$$\frac{d}{dV} \int_0^{\pi} K(V,s) f\left[s,x(s)\right] ds = - \int_V^{\pi} f\left[s,x(s)\right] ds + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} s f\left[s,x(s)\right] ds$$

$$\frac{d^2}{dV^2} \int_0^{\pi} K(V,s) f\left[s,x(s)\right] ds = f\left[V,x(V)\right]$$

Or $g(0) = g(\pi) = 0$ car le noyau est nul pour ces valeurs

Les seules solutions possibles de (IV.7.8) sont :

$$g = C \sin \sqrt{\lambda} V$$

Elles doivent également vérifier :

$$C \sin \sqrt{\lambda}\, \pi = 0$$

La plus petite valeur propre est : $\lambda_1 = 1$

Comme $C \neq 0$, $\sqrt{\lambda_n} = n$ soit $\lambda_n = n^2$

Rechercher les solutions périodiques de l'équation (IV.7.5) revient donc à étudier l'existence des solutions pour (IV.7.7)

Appliquons alors les théorèmes d'Hammerstein.

EXISTENCE

$$f(V,u) = - \frac{e \cos V}{1+e \cos V} u - \Omega^2 \sin \left| \frac{u}{1+e \cos V} \right| + 4e \sin V$$

$$\left| f(V,u) \right| < \left| \frac{e \cos V}{1+e \cos V} \right| |u| + \Omega^2 + 4e$$

$$\left| f(V,u) \right| < \frac{e}{1+e} |u| + \Omega^2 + 4e$$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{e}{1+e} \\ \\ C_2 = 4e + \Omega^2 \end{cases}$$

La condition d'existence est donc

$$\frac{e}{1+e} < 1$$

Quelque soit e, il existe toujours une solution périodique de période 2π.

UNICITE

$$f(V,u_1) - f(V,u_2) = - \frac{e \cos V}{1+e \cos V} (u_1-u_2) - \Omega^2 \left\{ \sin \frac{u_1}{1+e \cos V} - \sin \frac{u_2}{1+e \cos V} \right\}$$

$$\left| f(V,u_1) - f(V,u_2) \right| < \frac{e + \Omega^2}{1-e} \left| u_1-u_2 \right|$$

La solution périodique de période 2π sera unique si

$$\frac{e + \Omega^2}{1-e} < 1$$

La majoration est forte, ce qui entraine que cette condition est plus faible que celle trouvée sur la figure (47), paragraphe IV.4 ou la figure (48) paragraphe IV.5

IV.8 Recherche de l'existence des solutions périodiques impaires d'un système différentiel du second ordre par la méthode Cesari.

IV.8.1. Principe de la méthode

Nous résumons ici les grandes lignes du développement de Cesari (*), repris par Mawhin (**) puis par Roseau (***).

IV.8.1.1. Système différentiel

Nous considèrons le système différentiel :

$$(IV.8.1) \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{q}\ (\vec{x} : t)$$

avec les hypothèses H suivantes :

- E^2 espace vectoriel normé de dimension 2 normé par
- $\|\vec{x}\| = \text{Sup}\ |x_j| \quad \text{si} \quad \vec{x} = \{x_1 , x_2\} \in E^2 \quad 1 \leq j \leq 2$
- $\vec{q}\ (x,t)$ est une application continue sur $\{ (\vec{x} : \vec{x} \in E^2 \text{ et } \|x\| \leq R) \times (t : t \in]-\infty, +\infty[) \}$
- périodique dans E^2 de période $T = 2\pi$
- satisfaisant à la condition de Lipschitz :

$$(IV.8.2) \quad \|\vec{q}\ (\vec{x}^1, t) - \vec{q}\ (\vec{x}^2, t)\| \leq M \|\vec{x}^1 - \vec{x}^2\|$$

- Nous posons :

$$(IV.8.3) \quad \text{Sup}_{\substack{\|\vec{x}\| \leq R \\ t \in [o,T]}} \|\vec{q}\ (\vec{x}, t)\| = K$$

(*) CESARI.L. "Functional Analysis and Periodic solutions of Non-linear Differential Equations". Contributions to Differential Equations. Vol. 1 n°2. Wiley and sons New York 1963 pp. 149.187.

(**) MAWHIN.J "Application directe de la méthode générale de Cesari à l'étude des solutions périodiques de systèmes differentiels faiblement non-linéaires" Bulletin de la Societe Royale des Sciences de Liège 36° année n° 5-6 1967 pp.193.210.

(***) ROSEAU.M "Solutions périodiques ou presque périodiques des systèmes differentiels de la mécanique non linéaire" Publication du Département de Mécanique de la Faculté des Sciences de Paris. Année 1970.

IV.8.1.2. - Généralités et notations

Considèrons l'espace S des fonctions vectorielles

$$\vec{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}$$

réelles, continues, impaires et périodiques de période de 2π muni de la norme

$$\nu(\vec{x}) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt\right]^{1/2}$$

A tout élément $\vec{x}$ de S, on peut associer sa série de Fourier

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \vec{b}_k \sin kt$$

avec : $\vec{b}_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \vec{x}(t) \sin kt\, dt$

L'égalité de Bessel-Parseval s'écrit :

$$\nu(\vec{x}) = \left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)dt\right]^{1/2}$$

Soit S_o le sous espace des éléments $\vec{x} \in S$ dont les composantes sont des polynômes trigonométriques d'ordre m

$$\vec{P}_m \vec{x} = \sum_{k=1}^{m} \vec{b}_k \sin kt$$

Appelons S_1 le sous espace des éléments $\vec{x} \in S$ tels que

$$\vec{P}_m \vec{x} = \vec{o}$$

A tout élément $\vec{x} \in S_1$ se trouve donc associée une série de Fourier

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \vec{b}_k \sin kt$$

Pour tout $\vec{x} \in S$, on a :

$$\vec{x} - \vec{P}_m \vec{x} \in S_1$$

Définissons avec les auteurs, l'opérateur $\vec{H}$ à partir de $\vec{X}'(t) = \vec{x}(t)$ par :

$$\vec{X}(t) = \vec{H}\vec{x} \text{ pour } \vec{x} \in S_1 \qquad \vec{X}(t) \in S_1$$

Nous pouvons écrire (cf.Cesari p.156) :

$$(IV.8.4)\quad \nu[\vec{H}(\vec{x}-\vec{P}_m\vec{x})] \leq \frac{\sqrt{2}}{\omega}\sigma(m)\,\nu(x)$$

avec $(IV.8.5)\quad \sigma^2(m) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\ ;\ (m+1)^{-1} < \sigma(m) < m^{-1/2}$

IV.8.I.3. Processus d'approximation

Soit r un nombre tel que $o < r < R$ et $\vec{x}^o$ un élément quelconque de S_o tel que :

$$(IV.8.6)\qquad \nu(\vec{x}^o) \leq r < R$$

Appelons S_R^o l'ensemble tel que :

$$\begin{cases} \vec{x} \in S & \nu(x) \leq R \\ \vec{P}_m\vec{x} = \vec{x}_o \end{cases}$$

Introduisons comme Cesari, l'opérateur T_m défini par =

$$\vec{T}_m = \vec{P}_m + \vec{H}\,(\vec{I} - \vec{P}_m)\,\vec{q}$$

avec $\begin{cases} \vec{q} \text{ second membre de l'équation} \\ \vec{I} \text{ l'opérateur identité} \end{cases}$

Soit : $\vec{y} = \vec{T}_m\,\vec{x} = \vec{P}_m\vec{x} + \vec{H}\,(\vec{I} - \vec{P}_m)\,\vec{q}\,\vec{x}$

$$(IV.8.7)\qquad = \vec{x}^o + \vec{H}\,(\vec{I} - \vec{P}_m)\,\vec{q}\,\vec{x}$$

Alors $\vec{P}_m\vec{y} = x^o$

En effet $(\vec{I}-\vec{P}_m)\vec{q}\vec{x} \in S_1$ et $\vec{H}\,(\vec{I}-\vec{P}_m)\vec{q}\vec{x} \in S_1$

d'où $\vec{P}_m\vec{H}(\vec{I}-\vec{P}_m)\vec{q}\vec{x} = o$

D'autre part, $\nu(\vec{y}) \leq \nu(x^o) + \nu[\vec{H}(\vec{I}-\vec{P}_m)\vec{q}\vec{x}] \leq r + \frac{\sqrt{2}}{\omega}\sigma(m)\,K$

d'après (IV.8.3) et (IV.8.4)

Dès lors, $\nu(\vec{y}) \leq R$ si nous prenons m suffisamment grand pour que $\frac{\sqrt{2}}{\omega}\sigma(m)\,K \leq R - r$

ce qui est toujours possible en vertu de (IV.8.5). Alors $\vec{y} \in S_R^o$

En outre si $\vec{x}^1, \vec{x}^2 \in S_R^o$ $\quad \vec{y}^1 = \vec{T}_m\,\vec{x}^1$, $\vec{y}^2 = \vec{T}_m x^2$

$$(IV.8.8)\quad \nu(\vec{y}^1-\vec{y}^2) = \nu\{H\,[(\vec{q}\vec{x}^1 - \vec{q}\vec{x}^2)] - \vec{P}_m(\vec{q}\vec{x}^1 - \vec{q}\vec{x}^2)\}$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{\omega}\,\sigma(m)M\,\nu(\vec{x}^1 - \vec{x}^2)$$

en utilisant (IV.8.2) et (IV.8.4)

$\vec{T}_m$ sera une <u>contraction</u> si on prend m suffisamment grand pour que

$$\frac{\sqrt{2}}{\omega}\,\sigma(m)\,M < 1$$

Il résulte alors du Théorème des approximations successives que : 1- $\vec{T}_m$ possède un et un seul point fixe dans S_R^o tel que

$$\vec{T}_m\,\vec{y} = \vec{y}$$

2 - $\vec{y}$ peut s'obtenir comme limite du processus d'approximations successives défini par :

$$(IV.8.9)\quad \vec{y}^{k+1} = \vec{x}^o + \vec{H}(\vec{I}-\vec{P}_m)\vec{q}(\vec{y}^k,t) \qquad k = o,1,2....$$

avec $\vec{y}^o = \vec{x}^o$

3 - L'élément fixe $\vec{y}(t)$ est une fonction périodique de période T une fois continûment dérivable en t pour $t \in]-\infty, +\infty[$ et satisfaisant au système différentiel

$$\vec{y}' = \vec{q}(\vec{y},t) + \vec{P}_m[\,\vec{y}' - \vec{q}(\vec{y},t)]$$

$$\text{ou}\quad (IV.8.10)\quad \vec{y}' = \vec{q}(\vec{y},t) + \vec{x}_o' - \vec{P}_m\vec{q}\,(\vec{y},t)$$

par dérivation de (IV.8.7)

4 - y(t) dépend continûment de $\vec{x}^o$

IV.8.1.4. <u>Théorème</u>

Sous les hypothèses énoncées au paragraphe IV.8.1.1., il existe un entier $m_o \geq o$ tel que pour tout entier $m \geq m_o$ et tout polynôme trigonométrique d'ordre m, $\vec{x}^o \in S_o$ satisfaisant à (IV.8.6), il existe une et une seule fonction $\vec{y}$ (t) périodique de période T, une fois continûment dérivable par rapport à t pour $t \in]-\infty,+\infty[$ et vérifiant l'équation différentielle

(IV.8.10). Cette fonction $\vec{y}$ dépend continûment de $\vec{x}^o$ et peut s'obtenir comme limite de la suite d'approximationssuccessives définie par (IV.8.9).

IV.8.1.5. Solutions périodiques du système (IV.8.1)

Introduisons le vecteur

$$\vec{\alpha} = \{ b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, \ldots b_{m1}, b_{m2} \}$$

$$= \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_{2m-1}, \alpha_{2m} \}$$

et notons par la suite $\vec{y}(t,\vec{\alpha})$ le point fixe de l'application T_m. Il résulte du théorème, que le système (IV.8.1) possèdera une solution périodique T si on peut trouver $\vec{x}^o \in S_o$ avec $\nu(\vec{x}^o) \leq r$ tel que pour tout t, et d'après (IV.8.10)

$$\frac{d\vec{x}^o}{dt} - \vec{P}_m \vec{q}(\vec{y},t) = o \qquad \text{(IV.8.11)}$$

Puisque $\vec{y}(t,\vec{\alpha})$ est une fonction uniforme de $\vec{x}^o$, c'est-à-dire du vecteur $\vec{\alpha}$ dont les composantes sont les coefficients de Fourier des deux composantes de $\vec{x}^o$, l'équation (IV.8.11) est en fait un système de 2m équations à 2m inconnues que Cesari désigne sous le nom d'équations déterminantes et qui, explicitées s'écrivent :

$$k\vec{b}_k = \frac{2}{T} \int_o^T \vec{q}\,[\vec{y}(t,\vec{\alpha})] \cos kt\, dt \qquad \text{(IV.8.12)}$$

A chaque solution $\vec{\alpha}$ du système (IV.8.12) correspond une solution et une seule, périodique de période T du système (IV.8.1) telle que $\vec{P}_m \vec{y} = \vec{x}^o$, ce qui revient à dire que $\vec{x}^o$ représente le développement de Fourier à l'ordre m de cette solution.

IV.8.2 Application

Nous suivons ici plus particulièrement Césari, référencé précédemment (pp.166.177) dans l'application de la méthode à la résolution de l'équation :

$$\ddot{x} + x^3 = \sin t$$

IV.8.2.1 Equation à étudier

Reprenons l'équation obtenue page 136 en (IV.7.6) :

$$\frac{d^2x}{dV^2} + \frac{e \cos V}{1+e\cos V} x + \Omega^2 \sin\left[\frac{x}{1+e\cos V}\right] = 4 e \sin V$$

Comme nous l'avons précisé antérieurement, nous recherchons des solutions impaires harmoniques de période 2π .

Considèrons toutes les fonctions périodiques réelles $x(+V)$ de période 2π [$x(v)$ de carré intégrale sur $[0,2\pi]$ avec $x(-V) = -x(V)$], de développement en série de Fourier de la forme :

$$x(V) = b_1 \sin V + b_2 \sin 2V + b_3 \sin 3V + \ldots.$$

avec la norme

$$v(x) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(V)dV\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{2}(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots.)\right]^{1/2}$$

Nous avons déjà recherché au paragraphe IV.4 les premier, second et troisième harmoniques et évalué numériquement les valeurs des coefficients en série de Fourier. Les résultats sont les figures 44 et 45 pour les harmoniques 1 et 2 et page 123 pour les 3 premiers harmoniques.

Ces résultats nous permettent d'affirmer que b_2 est nettement plus petit que b_1. Ce rapport est variable selon l'excentricité choisie, mais nous restons dans des limites convenables pour les cas les plus défavorables en disant que b_2 est 10 fois plus petit que b_1.

Pour un $h > o$ donné, nous pouvons écrire :

$$|b_1| < h \qquad |b_2| < \frac{h}{10}$$

Pour l'équation différentielle ci-dessus, les hypothèses H définies en IV.8.1.1. sont vérifiées une à une au cours de l'application de la méthode générale.

IV.8.2.2. Application de la Méthode générale

Considèrons

$$Px = b_1 \sin V + b_2 \sin 2V$$

Choisissons pour opérateur H, le résultat obtenu après une double intégration

$$Hx = - b_1 \sin V - \frac{1}{2^2} b_2 \sin 2V - \ldots$$

(voir Cesari page 166)

Si Px = o, alors

$$x(t) = \sum_{k=3}^{\infty} b_k \sin kV \in S_1$$

$$\nu(Hx) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^4} b_k^2 \right]^{1/2}$$

que l'on peut majorer en mettant en facteur le premier terme $\frac{1}{3^4}$ (le plus grand).

Nous obtenons ainsi une meilleure majoration qu'avec (IV.8.4)

$$(IV.8.13) \qquad \nu(Hx) \leq \frac{1}{3^2} \nu(x)$$

D'autre part,

$$|Hx| \leq \frac{1}{3^2} |b_3| + \frac{1}{4^2} |b_4| + \ldots$$

$$\leq \sqrt{2} \left(\frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} (b_3^2 + b_4^2 + \ldots)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{2} \left(\frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots\right)^{1/2} \nu(x)$$

$$|Hx| \leq 0{,}0247 \quad \nu(x)$$

Appelons qx l'opérateur défini par :

$$qx = -\frac{e\cos V}{1+e\cos V} x - \Omega^2 \sin \frac{x}{1+e\cos V} + 4e \sin V$$

et suivant Cesari page 167

$$fx = qx - Pqx$$

$$Fx = H(qx - Pqx)$$

Soit x^* une fonction telle que

$$Px^* = x^* = b_1 \sin V + b_2 \sin 2V$$

$$\nu(x^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[b_1^2 + b_2^2 \right]^{1/2}$$

et supposons que les coefficients b_1 et b_2 satisfont aux inégalités $|b_1| \leq h \quad |b_2| \leq \frac{h}{10}$ (h = constante)
c'est-à-dire que le point (b_1 et b_2) appartient au domaine rectangle $(h, \frac{h}{10})$

Alors

$$(IV.8.14) \quad \nu(x^*) \leq \frac{1}{2} \left[h^2 + \frac{h^2}{10} \right]^{1/2} = 0,71\ h$$

$$|x^*| \leq h + \frac{h}{10} = 1,1\ h$$

Posons $c = 0,71\ h$ et $r = 1,1\ h$

Comme Césari, considérons l'espace vectoriel S^* :

$S^* = [x, x \in S, |x| \leq R, Px = x^*, \nu(x) \leq d, \nu(x - Px \leq \delta]$
d et δ étant des constantes ($d > c$).
S^* est complet quelque soit d et δ (cf.Cesari p.159)
Pour tout $x \in S^*$, nous avons $\nu(Px) = \nu(x^*) \leq c$

$$|Px| = |x^*| \leq r$$

et posons $|x - Px| \leq \rho$

Introduisons alors l'opérateur T comme au paragraphe IV.8.1.3. par

$$y = Tx = Px + Fx = Px + Hf\ x = Px + H\ (qx - Pqx)$$

Pour $x \in S^*$ nous avons $Px = Px^* = x^*$ et

$$Py = P(Px + Fx) = PPx = Px = Px^* = x^*$$

$$(IV.8.15) \quad y - Py = H\ (qx - Pqx)$$

d'où :

$$(IV.8.16) \begin{cases} \nu(y-Py) \leq \frac{1}{3} 2 \nu(qx-Pqx) \text{ d'après (IV.8.13)} \\ |y-Py| \leq 0,0247\ \nu(qx-Pqx) \end{cases}$$

En tenant compte du fait que :

$$\nu(qx - Pqx) \leq \nu(qx)$$

Nous pouvons écrire :

$$\nu(y-Py) < \frac{1}{3^2}\left\{\nu\left(\frac{e\cos V}{1+e\cos V}\,x\right) + \nu\left(\Omega^2 \sin\frac{x}{1+e\cos V}\right) + \nu(4e\sin V)\right\}$$

$$(IV.8.17)\begin{cases} \nu(y-Py) \leq \frac{1}{3^2}\left\{\frac{e}{1-e}\,d + \Omega^2 + \frac{4e}{\sqrt{2}}\right\} \\ |y-Py| \leq 0{,}0247\left\{\frac{e}{1-e}\,d + \Omega^2 + \frac{4e}{\sqrt{2}}\right\} \end{cases}$$

Pour que y appartienne à S^* , il importe que :

$$(IV.8.18)\begin{cases} \nu(y-Py) \leq \delta \\ y-Py \leq \rho \end{cases}$$

En suivant Cesari page 167,nous obtiendrons de meilleures inégalités en posant :

$$(IV.8.19) \qquad x = Px + (x-Px)$$

$$(IV.8.20) \qquad \nu(u-Pu) \leq \nu(u) \qquad u \in S$$

Avec la transformation (IV.8.19), en notant que :

$$Py = Px = Px^* = x^*$$

$$\nu(x) = \nu[Px + (x-Px)] \leq \nu(Px) + \nu(x-Px) \leq c + \delta$$

$$|x| \leq |Px + (x-Px)| \leq |Px| + |x-Px| \leq r+\rho$$

Si les relations (IV.8.18) sont vérifiées par des valeurs de h ,δ,ρ convenables et d'autre part que nous imposions $\begin{cases} c+\delta = d \\ r+\rho = R \end{cases}$

alors $\nu(x) \leq d$ et $|x| \leq R$. Il en est de même pour $\vec{y}$ qui se trouve donc dans S^*

Nous pouvons écrire que

$$T(S^*) \in S^*$$

D'autre part, d'après (IV.8.8)

$$\nu(y^1-y^2) = \nu\{H\,[(qx^1-qx^2) - P(qx^1-qx^2)]\}$$

En utilisant (IV.8.13) et (IV.8.18)

$$(IV.8.21)\quad \nu(y^1-y^2) \leq \frac{1}{3^2}\,\nu[(qx^1-qx^2) - P(qx^1-qx^2)] \leq \frac{1}{3^2}\,\nu(qx^1-qx^2)$$

(IV.8.2.3) Developpements et résultats

En utilisant IV.8.19, nous allons obtenir de meilleurs inégalités que IV.8.17.

Evaluons les quantités (IV.8.18) et (IV.8.21) en faisant intervenir le second membre de l'equation (IV.7.6)

$$qx-Pqx = -\frac{e\cos V}{1+e\cos V}\,x - \Omega^2 \sin\frac{x}{1+e\cos V} + 4e\sin V$$

$$+ P\{\frac{e\cos V}{1+e\cos V}\,x + \Omega^2 \sin\frac{x}{1+e\cos V}\} - 4e\sin V$$

$$= -\frac{e\cos V}{1+e\cos V}\,x + P\{\frac{e\cos V}{1+e\cos V}\,x\}$$

$$- \Omega^2\{\sin\frac{x}{1+e\cos V} - P\sin\frac{x}{1+e\cos V}\}$$

En utilisant (IV.8.19) et (IV.8.20)

$$qx - Pqx = -\frac{e\cos V}{1+e\cos V}\{Px + (x-Px)\} + P[\frac{e\cos V}{1+e\cos V}\{Px+(x-Px)\}]$$

$$- \Omega^2[\sin\frac{x}{1+e\cos V} - P\sin\frac{x}{1+e\cos V}]$$

$$qx - Pqx = -[\frac{e\cos V}{1+e\cos V}\,Px + P\{\frac{e\cos V}{1+e\cos V}\,Px\}]$$

$$+[\frac{e\cos V}{1+e\cos V}\,(x-Px) + P\{\frac{e\cos V}{1+e\cos V}(x-Px)\}]$$

$$- \Omega^2[\sin\frac{x}{1+e\cos V} - P\sin\frac{x}{1+e\cos V}]$$

$$\nu(qx-Pqx) \leqslant \nu[\frac{e\cos V}{1+e\cos V} Px] + \nu[\frac{e\cos V}{1+e\cos V}(x-Px)] + \Omega^2 \nu[\sin \frac{x}{1+e\cos V}]$$

$$\leqslant [\frac{e\cos V}{1+e\cos V} x^*] + \frac{e}{1-e} \delta + \Omega^2$$

$$\text{IV.8.22} \quad \begin{cases} \nu(y-Py) \leqslant \frac{1}{3^2} [\frac{e}{1-e} (c + \delta) + \Omega^2] \\ |y-Py| < 0{,}0247 [\frac{e}{1-e} (c + \delta) + \Omega^2] \end{cases}$$

D'autre part, d'après (IV.8.21)

$$\nu(y^1-y^2) \leqslant \frac{1}{3^2} \nu(qx^1-qx^2)$$

$$\leqslant \frac{1}{3^2} \nu[\frac{e\cos V}{1+e\cos V}(x^1-x^2) + \Omega^2 \{\sin \frac{x^1}{1+e\cos V} - \sin \frac{x^2}{1+e\cos V}\}]$$

$$\leqslant \frac{1}{3^2} [\frac{e}{1-e} \nu(x^1-x^2) + \frac{\Omega^2}{1-e} \nu(x^1-x^2)]$$

$$\nu(y^1-y^2) \leqslant \frac{1}{3^2} \frac{e+\Omega^2}{1-e} \nu(x^1-x^2)$$

T est une contraction si :

$$\text{(IV.8.23)} \qquad \frac{1}{3^2} \frac{e+\Omega^2}{1-e} < 1$$

Cette condition est encore moins restrictive que celle obtenue page 140. Nous pouvons avoir une solution unique même si $\Omega^2 = 3$ tant que $e < 0{,}6$.

Avec la condition (IV.8.23), $y \in S^*$ est solution unique si

$$\begin{cases} \frac{1}{3^2} [\frac{e}{1-e} (c+\delta) + \Omega^2] < \delta \\ 0{,}0247 [\frac{e}{1-e} (c+\delta) + \Omega^2] < \rho \end{cases}$$

La résolution de la première inégalité en se donnant les valeurs suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} e = 0{,}03 \\ b_1 < 0{,}6 \\ b_2 < 0{,}06 \end{array}\right\} \quad 1^\circ \text{ essai page 123}$$

soit : $c = 0{,}426$

nous conduit à

$$\delta = 0,015 + 0,111\Omega^2$$

pour qu'elle soit vérifiée.

Alors $d = 0,441 + 0,111\Omega^2$

La seconde inégalité est vérifiée si

$$\rho = 0,001 + 0,033\Omega^2$$

d'où $R = 0,661 + 0,033\Omega^2$

Dans le cas particulier précisé ci-dessus, nous avons donc trouvé h, δ, ρ convenables pour que (IV.8.18) soit vérifié. Il est évident en même temps que (IV.8.23) l'est aussi. Alors la solution y périodique existe et est unique pour ce choix de paramètres et de constantes. $y \in S^*$ dépend continuement de x^*.

Nous pouvons également démontrer l'existence d'une solution périodique en suivant la démarche du paragraphe IV.8.1.5. Une solution pourra exister si nous pouvons trouver des valeurs des coefficients b_1 et b_2 qui satisfont les équations déterminantes de Césari en même temps que l'inégalité (IV.8.14).

D'après (IV.8.15) $y = Py = H(qy - Pqy)$

Puisque le premier membre est une fonction continue, le second l'est également et nous pouvons dériver deux fois :

$$\frac{d^2y}{dV^2} = P\frac{d^2y}{dV^2} + qy - Pqy$$

ou $$\frac{d^2y}{dV^2} = qy + P\left[\frac{d^2y}{dV^2} - qy\right]$$

La fonction y(V) sera solution de (IV.7.6) si :

(IV.8.25) $$P\left[\frac{d^2y}{dV^2} - qy\right] \equiv o$$

Puisque y(V) est une fonction uniforme de x^*, c'est-à-dire

des coefficients de Fourier de x^*, l'équation (IV.8.25) est en fait un système de deux équations à deux inconnues b_1 et b_2 qui s'écrivent :

$$\begin{cases} b_1 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q(V)\ \sin V\ dV \\ 4b_2 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q(V)\ \sin 2V\ dV \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} b_1+4e = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e\cos V}{1+e\cos V}\ y(V)\sin V\ dV + \frac{\Omega}{\pi}^2\int_0^{2\pi} \sin\frac{y(V)}{1+e\cos V}\ \sin V\ dV \\ 4b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e\cos V}{1+e\cos V} y(V)\sin 2V dV + \frac{\Omega^2}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\frac{y(V)}{1+e\cos V}\ \sin 2V\ dV \end{cases}$$

soit

$$(IV.8.26) \qquad \begin{cases} U_1 = b_1 + 4e - \beta_1(b_1, b_2) = 0 \\ U_2 = 4b_2 - \beta_2(b_1, b_2) = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons considérer ces équations déterminantes au même titre que celles obtenues au paragraphe IV.8.1.5.

Au lieu de y(V), utilisons $x^*(V)$ pour avoir une première approximation (IV.8.26) qui s'écrit :

$$(IV.8.27) \qquad \begin{cases} u_1 = b_1 + 4e - \beta_{10}(b_1, b_2) = 0 \\ u_2 = 4b_2 - \beta_{20}(b_1, b_2) = 0 \end{cases}$$

β_{10} et β_{20} étant les mêmes expressions que ci-dessus en remplaçant y(V) par $x^*(V) = b_1 \sin V + B_2 \sin 2V$.

Si nous appelons C la courbe décrite dans le plan u_1, u_2 quand b_1 et b_2 parcourent le périmètre du rectangle $b_1 = 0{,}6$ $b_2 = 0{,}06$ et C_o celle décrite dans U_1, U_2, la "distance" entre C et C_o peut s'obtenir par :

$$[(U_1 - u_1)^2 + (U_2 - u_2)^2] = (\beta_1 - \beta_{10})^2 + (\beta_2 - \beta_{20})^2$$

La distance de l'origine à C étant supérieure à cette quantité, le système approché (IV.8.27), de même (IV.8.26) a une solution dans le rectangle b_1, b_2 défini plus haut.

Ceci prouve aussi l'existence d'une solution périodique de l'équation originale (IV.7.6).

V - CONCLUSIONS SUR LA 2ème PARTIE

Cette deuxième partie peut se scinder en deux. Le chapitre IV bien que représentant une simplification du phénomène montre en réalité sa complexité si on veut l'embrasser totalement.

Avant de voir comment le chapitre IV éclaire certains aspects du cas général, il est intéressant de se pencher sur les résultats obtenus.

En particulier, la démonstration exacte et purement théorique de l'existence des solutions périodiques d'une équation différentielle du second ordre fortement non linéaire est faite par deux méthodes. Le paragraphe IV.6 peut également en laisser entrevoir une troisième, utilisant la théorie de la synchronisation développée par Monsieur Maurice ROSEAU au chapitre 18 de son ouvrage "Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité". Cette méthode pourrait apporter plus de résultats que l'application de Bogoliubov et Mitropolski, basée sur la même remarque, au paragraphe IV.5. L'équation serait considérée de la façon suivante.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) + e\vec{g}(\vec{x},t,e)$$

Le système $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ possède une famille de solutions périodiques de période T, fonction des conditions initiales. Si pour e assez petit, le système possède une solution qui lorsque e tend vers zéro, tend vers une solution privilégiée de la famille, celle correspondant à $T = 2\pi$, alors il possède une solution périodique de période 2π .

Il y a en effet eu de nombreuses publications donnant uniquement des résultats numériques (De Bra, Kane, Brereton et Modi) mais aucune ne démontre l'existence des solutions périodiques bien que leur présence soit constatée. Elles s'intéressent d'ailleurs en général à des cas particuliers et c'est la valeur limite $\Omega^2 = 3$ qui apparait le plus souvent. Un paramètre est ainsi éliminé (Ω) .

Il faut préciser enfin que la méthode des conséquents de Poincaré nous donne de précieux renseignements quand à l'évolution des solutions si les conditions initiales changent ou si se modifie la forme du corps. Ces résultats obtenus numériquement

sont parfaitement vérifiés par la méthode de la balance harmonique et la précision avec laquelle les courbes de bifurcation déduites numériquement et analytiquement se superposent est une preuve éclatante de la validité des résultats obtenus par ordinateur.

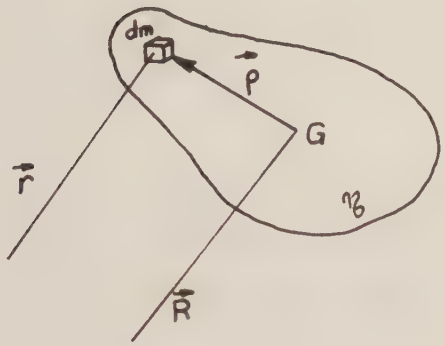
L'étude du mouvement dans le plan de tangage nous a fait oublier un moment qu'il était hors de question de ne pas tenir compte du couplage dû au lacet et au roulis. Il serait nécessaire d'approfondir les limites des domaines de stabilité trouvés précédemment quand ceux-ci englobent des zônes de résonance "interne". Il faudrait en particulier, comme WITTAKER.E.T. dans son "A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies", 4° edition 1965 pp.426 et suivantes, poursuivre le développement commencé dans le paragraphe II.4 page 64 en introduisant une transformation de contact utilisant les modes normaux de vibration. Il devrait alors être possible d'en déduire le comportement des solutions au voisinage des résonances.

Ce travail devrait en effet se poursuivre sur le plan théorique, beaucoup plus que numérique, et l'étendue des problèmes rencontrés représente un champ d'investigations considérable pour des nouvelles théories mathématiques qui viennent tout juste d'être énoncées ou remises à l'ordre du jour.

Puisse ce développement être un début de réflexion pour d'autres recherches dont nous venons de définir grossièrement les axes.

ANNEXE 1

FONCTION DE FORCES DUE AUX FORCES D'ATTRACTION D'UNE TERRE SPHERIQUE HOMOGENE SUR UN SATELLITE DE FORME QUELCONQUE



La fonction de forces s'écrit :

$$U = fm_0 \iiint_{\mathcal{V}} \frac{dm}{r}$$

$$r^2 = (\vec{R}+\vec{\rho})^2 = R^2+2\vec{\rho}.\vec{R}+\rho^2 = R^2\left(1 + \frac{2\vec{\rho}.\vec{R}+\rho^2}{R^2}\right)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{2\vec{\rho}.\vec{R}+\rho^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{R}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\vec{\rho}.\vec{R}+\rho^2}{R^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{2\vec{\rho}.\vec{R}+\rho^2}{R^2}\right)^2 - \frac{5}{16}\left(\frac{2\vec{\rho}.\vec{R}+\rho^2}{R^2}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{R}\left[1 - \frac{\vec{\rho}.\vec{R}}{R^2} - \frac{\rho^2}{2R^2} + \frac{3}{2}\frac{(\vec{\rho}.\vec{R})^2}{R^4} + \frac{3}{2}\frac{\rho^2}{R^4}(\vec{\rho}.\vec{R}) - \frac{5}{2}\frac{(\vec{\rho}.\vec{R})^3}{R^6} + \varepsilon\left(\frac{1}{R^4}\right)\right]$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{\vec{\rho}.\vec{R}}{R^3} - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^3} + \frac{3}{2}\frac{(\vec{\rho}.\vec{R})^2}{R^5} + \frac{3}{2}\frac{\rho^2}{R^5}(\vec{\rho}.\vec{R}) - \frac{5}{2}\frac{(\vec{\rho}.\vec{R})^3}{R^7} + \varepsilon\left(\frac{1}{R^5}\right)$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots$$

L'indice indique l'ordre du terme en $\frac{1}{R}$.

$$U_1 = \frac{fm_0 m}{R}$$

$$U_2 = -\frac{fm_0}{R^3}\iiint_{\mathcal{V}} (\vec{\rho}.\vec{R})\,dm = 0$$ si G est le centre des masses du corps.

$$U_3 = -\frac{fm_0}{2R^5}\iiint_{\mathcal{M}}\left(3\,\rho^2(\vec{\rho}.\vec{R}) - \frac{5(\vec{\rho}.\vec{R})^3}{R^2}\right)dm$$

Si les axes liés au corps sont les axes principaux d'inertie, soient xyz les coordonnées de dm dans ces axes et α, β, γ les cosinus directeurs de R.

$$U_3 = \frac{3fm_0}{2R^3}\iiint_{\mathcal{M}}\left((\alpha^2-\frac{1}{3})\,x^2 + (\beta^2-\frac{1}{3})\,y^2 + (\gamma^2-\frac{1}{3})\,z^2\right)dm$$

En effet, les produits d'inertie tels que $\alpha\beta\iiint_{\mathcal{M}} xy\,dm$ sont nuls.

$$U_3 = \frac{3fm_0}{2R^3}\left((\alpha^2-\frac{1}{3})(\frac{A+B+C}{2}-A) + (\beta^2-\frac{1}{3})(\frac{A+B+C}{2}-B) + (\gamma^2-\frac{1}{3})(\frac{A+B+C}{2}-C)\right)$$

$$U_3 = \frac{3fm_0}{2R^3}\left(\frac{A+B+C}{3} - (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)\right)$$

Evaluons U_4.

$$U_4 = \frac{fm_0}{2R^4}\iiint_{\mathcal{M}}\left(3(x^2+y^2+z^2)(x\alpha+y\beta+z\gamma) - 5(x\alpha+y\beta+z\gamma)^3\right)dm$$

En posant $\iiint_{\mathcal{M}} x^3\,dm = I_{xxx}$, $\iiint_{\mathcal{M}} x^2y\,dm = I_{xxy}$, $\iiint_{\mathcal{M}} xyz\,dm = I_{xyz}$ etc on obtient :

$$\begin{aligned}U_4 = \frac{fm_0}{2R^4}\Big(&3(I_{xxx}+I_{xyy}+I_{xzz})\alpha + 3(I_{yyy}+I_{yxx}+I_{yzz})\beta + \\ &+ 3(I_{zzz}+I_{zxx}+I_{zyy})\gamma - 5(I_{xxx}\alpha^3 + I_{yyy}\beta^3 + I_{zzz}\gamma^3) \\ &- 30\,I_{xyz}\,\alpha\beta\gamma - 15(I_{yxx}\,\alpha^2\beta + I_{yxx}\,\alpha^2\gamma + I_{xyy}\,\alpha\beta^2 + \\ &+ I_{xzz}\,\alpha\gamma^2 + I_{zyy}\,\beta^2\gamma + I_{yzz}\,\beta\gamma^2)\end{aligned}$$

REMARQUE.

Ce terme U_4 peut être majoré en considérant que l'un quelconque des termes I est un moment d'inertie que multiplie l'une des plus grandes dimensions du corps . Si on néglige U_4 dans le développement de U, on néglige donc des termes d'ordre égal à $\frac{I}{R^3} \times \frac{l}{R}$. L'expression U_3 était d'ordre égal à $\frac{I}{R^3}$. (on suppose que I est le plus grand des moments principaux d'inertie, et l la plus grande dimension du corps).

Le fait de négliger U_4, donc, donne une approximation de l'ordre de $\frac{l}{R}$.

Or, $\frac{l}{R}$ pour un satellite actuel est de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-6}. L'approximation est donc très bonne.

Si l'on considère un satellite naturel comme la lune par exemple, de grande dimension, $\frac{l}{R} = 0.0045$ et nous ne pouvons plus négliger U_4.

Pour des satellites artificiels de faibles dimensions, nous pouvons prendre pour U :

$$U = fm_0 \left(\frac{m}{R} + \frac{3}{2R^3} \left(\frac{A+B+C}{3} - A\alpha^2 - B\beta^2 - C\gamma^2 \right) \right)$$

ANNEXE 2

REPRESENTATION DE LA POSITION D'UN CORPS DANS L'ESPACE PAR LES QUATERNIONS

A2.I - DETERMINATION DES PARAMETRES D'HAMILTON-RODRIGUES REGISSANT LE MOUVEMENT.

Le corps sera repéré par les angles de lacet, roulis et tangage définis Figure 2. 2ème partie § I.1.
Nous prendrons ici les notations utilisées dans "Mécanique Analytique" de LUR'E, Masson et Cie Editeurs, 1968, Chapitre 3, Tome 1.
Rappelons que pour une rotation d'angle χ autour d'un axe ayant pour cosinus directeurs ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$), les paramètres d'Hamilton-Rodrigues ont pour expression :

$$\lambda_0 = \cos\frac{\chi}{2}$$

$$\lambda_1 = \cos\alpha \sin\frac{\chi}{2}$$

$$\lambda_2 = \cos\beta \sin\frac{\chi}{2}$$

$$\lambda_3 = \cos\gamma \sin\frac{\chi}{2}$$

Nous avons ici une suite de rotations Θ_1, Θ_2, Θ_3 d'axes respectifs X, Y_1, z. (Figure 2 .p44.)
Nous exprimons les paramètres de Rodrigues-Hamilton dans le système XYZ. Notons qu'il suffira d'effectuer une soustraction de rotations finies pour exprimer ces paramètres dans xyz.

A2.I.1 - Rotation Θ_1.

Nous lui associons les paramètres δ_0, δ_1, δ_2, δ_3. Ici $\chi = \Theta_1$.

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \dfrac{\pi}{2} \\ \gamma = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \delta_0 = \cos \dfrac{\theta_1}{2} \\ \delta_1 = \sin \dfrac{\theta_1}{2} \\ \delta_2 = \delta_3 = 0 \end{cases}$$

A2.I.2 - Rotation θ_2.

Nous lui associons les paramètres μ_0, μ_1, μ_2, μ_3.

$\mathbf{x} = \theta_2$.

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\pi}{2} \\ \beta = \theta_1 \\ \gamma = \dfrac{\pi}{2} - \theta_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \cos \beta = \cos \theta_1 \\ \cos \gamma = \sin \theta_1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mu_0 = \cos \dfrac{\theta_2}{2} \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = \cos \theta_1 \sin \dfrac{\theta_2}{2} \\ \mu_3 = \sin \theta_1 \sin \dfrac{\theta_2}{2} \end{cases}$$

A2.I.3 - Rotation θ_3.

Nous lui associons les paramètres ν_0, ν_1, ν_2, ν_3.

$\mathbf{x} = \theta_3$.

$$\begin{cases} \alpha = \theta_2 - \dfrac{\pi}{2} \\ \beta = (SY, Sz) \\ \gamma = (SZ, Sz) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \sin \theta_2 \\ \cos \beta = - \cos \theta_2 \sin \theta_1 \\ \cos \gamma = \cos \theta_2 \cos \theta_1 \end{cases}$$

et
$$\begin{cases} \nu_0 = \cos \dfrac{\theta_3}{2} \\ \nu_1 = \sin \theta_2 \sin \dfrac{\theta_3}{2} \\ \nu_2 = - \cos \theta_2 \sin \theta_1 \sin \dfrac{\theta_3}{2} \\ \nu_3 = \cos \theta_2 \cos \theta_1 \sin \dfrac{\theta_3}{3} \end{cases}$$

A2.I.4 - Quaternion exprimant les 3 rotations successives.

Nous utilisons les relations de composition des rotations finies. Ces relations ne sont rien d'autre que les formules de multiplication des quaternions.

La composition des rotations θ_1 et θ_2 va s'écrire :

$$\begin{cases} \rho_0 = \delta_0 \mu_0 - \delta_1 \mu_1 - \delta_2 \mu_2 - \delta_3 \mu_3 \\ \rho_1 = \delta_1 \mu_0 + \delta_0 \mu_1 + \delta_3 \mu_2 - \delta_2 \mu_3 \\ \rho_2 = \delta_2 \mu_0 + \delta_0 \mu_2 + \delta_1 \mu_3 - \delta_3 \mu_1 \\ \rho_3 = \delta_3 \mu_0 + \delta_0 \mu_3 + \delta_2 \mu_1 - \delta_1 \mu_2 \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} \rho_0 = \cos \dfrac{\theta_1}{2} \cos \dfrac{\theta_2}{2} \\ \rho_1 = \sin \dfrac{\theta_1}{2} \cos \dfrac{\theta_2}{2} \\ \rho_2 = \cos \dfrac{\theta_1}{2} \sin \dfrac{\theta_2}{2} \\ \rho_3 = \sin \dfrac{\theta_1}{2} \sin \dfrac{\theta_2}{2} \end{cases}$$

La composition des deux rotations précédentes avec θ_3 nous donne enfin :

$$\begin{cases} \lambda_0 = \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3}{2} - \sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2} \\ \lambda_1 = \sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3}{2} + \cos\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2} \\ \lambda_2 = \cos\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3}{2} - \sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2} \\ \lambda_3 = \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2} + \sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3}{2} \end{cases}$$

Nous avons ainsi obtenu les λ_i à partir des lignes trigonométriques des angles caractérisant la position du solide. Il faut maintenant associer à cette définition la variation des λ_i dans le temps.

A2.II - EXPRESSION DU VECTEUR VITESSE ANGULAIRE EN FONCTION DES PARAMETRES D'HAMILTON.

Soit $\vec{\omega}$ le vecteur rotation instantané, de composantes ω_1, ω_2, ω_3 sur les axes x, y, z. Ce vecteur est lié à la rotation infinitésimale $\delta'\theta$. $\delta'\theta$ ajoutée à une rotation finie θ peut aussi être représentée par $\theta + \delta\theta$ où $\delta\theta$ est l'accroissement du vecteur θ. $\delta'\theta$ peut alors être calculée par une soustraction de rotations finies.

Nous obtenons les résultats suivants :

$$\begin{cases} 2\dot{\lambda}_0 = -(\omega_1\lambda_1 + \omega_2\lambda_2 + \omega_3\lambda_3) \\ 2\dot{\lambda}_1 = \omega_1\lambda_0 - \omega_2\lambda_3 + \omega_3\lambda_2 \\ 2\dot{\lambda}_2 = \omega_2\lambda_0 - \omega_3\lambda_1 + \omega_1\lambda_3 \\ 2\dot{\lambda}_3 = \omega_3\lambda_0 - \omega_1\lambda_2 + \omega_2\lambda_1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \omega_1 = 2(\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_0 + \lambda_2\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_2) \\ \omega_2 = 2(\lambda_0\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_0 + \lambda_3\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_3) \\ \omega_3 = 2(\lambda_0\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_0 + \lambda_1\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_1) \end{cases}$$

Dans le cas qui nous intéresse, si nous reprenons les relations I.3 de la 2ème partie :

$$\begin{cases} \omega_1 = p - \dot{V}(\sin\theta_1 \sin\theta_3 - \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3) \\ \omega_2 = q - \dot{V}(\sin\theta_1 \cos\theta_3 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3) \\ \omega_3 = r - \dot{V} \cos\theta_1 \cos\theta_2 \end{cases}$$

La matrice de passage liant XYZ à xyz étant la suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1 & 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) & 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \\ 2(-\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_2^2) - 1 & 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) \\ 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) & 2(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \omega_1 = p - 2\dot{V}(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \\ \omega_2 = q - 2\dot{V}(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) \\ \omega_3 = r - \dot{V}\left[2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1\right] \end{cases}$$

En définitive :

$$\begin{cases} 2\dot{\lambda}_0 = -\left[\lambda_1\{p-2\dot{V}(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)\} + \lambda_2\{q-2\dot{V}(\lambda_2\lambda_3+\lambda_0\lambda_1)\} + \lambda_3\{r-\dot{V}(2(\lambda_0^2+\lambda_3^2)-1)\}\right] \\ 2\dot{\lambda}_1 = \lambda_0\{p-2\dot{V}(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)\} - \lambda_3\{q-2\dot{V}(\lambda_2\lambda_3+\lambda_0\lambda_1)\} + \lambda_2\{r-\dot{V}(2(\lambda_0^2+\lambda_3^2)-1)\} \\ 2\dot{\lambda}_2 = \lambda_0\{q-2\dot{V}(\lambda_2\lambda_3+\lambda_0\lambda_1)\} - \lambda_1\{r-\dot{V}[2(\lambda_0^2+\lambda_3^2)-1]\} + \lambda_3\{p-2\dot{V}(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)\} \\ 2\dot{\lambda}_3 = \lambda_0\{r-\dot{V}[2(\lambda_0^2+\lambda_3^2)-1]\} - \lambda_2\{p-2\dot{V}(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)\} + \lambda_1\{q-2\dot{V}(\lambda_2\lambda_3+\lambda_0\lambda_1)\} \end{cases}$$

Après réduction :

$$\begin{cases} 2\,\dot{\lambda}_0 = -\{p\,\lambda_1 + q\,\lambda_2 + (r - \dot{V})\,\lambda_3\} \\ 2\,\dot{\lambda}_1 = p\,\lambda_0 + (r + \dot{V})\,\lambda_2 - q\,\lambda_3 \\ 2\,\dot{\lambda}_2 = q\,\lambda_0 - (r + \dot{V})\,\lambda_1 + p\,\lambda_3 \\ 2\,\dot{\lambda}_3 = (r - \dot{V})\,\lambda_0 + q\,\lambda_1 - p\,\lambda_2 \end{cases}$$

REMARQUE.

Nous retrouvons bien sûr des résultats identiques si nous utilisons une autre définition des quaternions, à savoir celle donnée dans la deuxième partie, paragraphe III.1 (FISCHER).

Une rotation d'espace, définie par un axe $\vec{\omega}$, de vecteur unitaire $\vec{p}$ et d'amplitude Θ peut s'interpréter à l'aide du quaternion de module unité

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\, i_1 + \lambda_2\, j_1 + \lambda_3\, k_1$$

avec $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ et i_1, j_1, k_1, composantes de $\vec{p}$ sur un système d'axes fixes $x_1\ y_1\ z_1$.
La formule de rotation s'écrit :

$$\underset{\sim}{\vec{y}} = \lambda\ \underset{\sim}{\vec{x}}\ \overline{\lambda}$$

le vecteur $\vec{y}$ étant le transformé du vecteur $\vec{x}$ dans la rotation considérée.
La formule de rotation appliquée à chacun des vecteurs unitaires XYZ du trièdre de référence du satellite donne la matrice de changement de base.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Par exemple :

$$x = (\lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 Z)\ X\ (\lambda_0 - \lambda_1 X - \lambda_2 Y - \lambda_3 Z)$$

$$= \left[\{2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1\}\ X + 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) Y + 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) Z\right]$$

En faisant de même pour y et z, nous obtenons la matrice de passage A déjà vue précédemment.
En la comparant à la matrice donnée dans la 2ème partie, paragraphe I.1, nous pouvons déduire les mêmes valeurs de λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, trouvées par une autre méthode.

ANNEXES 3

Divers programmes de calcul ont été utilisés pour obtenir les résultats numériques de ce travail. Ces travaux ont été effectués sur ordinateur 1130 d'une capacité mémoire de 8K ce qui a nécessité de sérieuses astuces de programmation FORTRAN

1. Intégration par une méthode de Runge-Kutta du 4° ordre du système formé des équations différentielles simultanées du 1° ordre et d'une équation algébrique et permettant d'avoir l'évolution de θ_1, θ_2, θ_3 dans le temps, pour des conditions initiales déterminées.

   Ce programme est complèté par un sous-programme PPLOT de tracé automatique des résultats sur enregistreur BENSON couplé à l'ordinateur 1130.

2. Intégration de l'équation relative au mouvement du corps dans le plan de tangage sur orbite elliptique avec tracé direct des résultats sur enregistreur BENSON.

3. Recherche des racines d'un système de 3 équations très particulières étant donné la présence des fonctions de BESSEL J_o, J_1, J_2, J_3, J_4.

INTEGRATION DES EQUATIONS GENERALES DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOUMIS AU GRADIENT DE GRAVITE SUR ORBITE D'EXCENTRICITE QUELCONQUE.

SOUS PROGRAMME PPLOT

STABILIS BONTHOUX MATH RECHERCHE

```
      COMMON MX,MY,C(480),E,ZACET,ROULI,TANGA,ZK1,ZK2,ZK3
      MX=3
      MY=2
      YS=1./6.28
      XS=0.1
      CALL SCALF(XS,YS,0.,0.)
      CALL FGRID(0,-30.0,0.,10.0,6)
      CALL FPLOT(2,30.0,0.)
      CALL POINT(2)
      CALL FCHAR(30.0,-4.,0.20,0.20,-1.57)
      WRITE(7,70)E,ZACET,ROULI
   70 FORMAT('DEGRES',10X,'EXCENTRICITE=',F5.2,10X,'TETA1 ZERO =
     1',F4.2,1X,'DEGRE',5X,'TETA2 ZERO=',F4.2,1X,'DEGRE')
      CALL FCHAR(25.,-93.,0.20,0.20,-1.57)
      WRITE(7,21)TANGA
   21 FORMAT('TETA3 ZERO =',F4.2)
      DO 81 J=1,7
      YVAR=40.-J*10.
      CALL FCHAR(YVAR,-0.5,0.15,0.15,-1.57)
   81 WRITE(7,71)YVAR
   71 FORMAT(F4.0)
      CALL FGRID(3,0.,0.,3.14,29)
      CALL FPLOT(2,0,-95.)
      CALL POINT(3)
      CALL FCHAR(-2.50,-95.0,0.20,0.20,-1.57)
      WRITE(7,72)
   72 FORMAT('PIS')
      DO 82 J=1,29
      JVAR=30-J
      ZVAR=-91.0+(J-1)*3.14
      CALL FCHAR(-2.50,ZVAR,0.15,0.15,-1.57)
   82 WRITE(7,73)JVAR
   73 FORMAT(I2)
      XB=C(121)
      YB=-C(1)
      CALL FPLOT(-2,XB,YB)
      DO 90 I=2,120
      XB=C(1+120)
      YB=-C(1)
   90 CALL FPLOT(0,XB,YB)
      CALL FCHAR(XB,YB,0.15,0.15,-1.57)
      WRITE(7,31)
   31 FORMAT('TETA1')
      XB=C(241)
```

.../...

```
      YB=-C(1)
      CALL FPLOT(-2,XB,YB)
      DO 91 I=2,120
      XB=C(I+240)
      YB=-C(I)
   91 CALL FPLOT(0,XB,YB)
      CALL FCHAR(XB,YB,0.15,0.15,-1.57)
      WRITE(7,32)
   32 FORMAT('TETA2')
      XB=C(361)
      YB=-C(1)
      CALL FPLOT(-2,XB,YB)
      DO 92 I=2,120
      XB=C(I+360)
      YB=-C(I)
   92 CALL FPLOT(0,XB,YB)
      CALL FCHAR(XB,YB,0.15,0.15,-1.57)
      WRITE(7,33)
   33 FORMAT('TETA3')
      CALL FCHAR(-30.0,-50.,0.20,0.20,-1.57)
      WRITE(7,34)ZK1,ZK2,ZK3
   34 FORMAT('ZK1=',F6.3,3X,'ZK2=',F5.3,3X,'ZK3=',F6.3)
      CALL EXIT
      END
```

PROGRAMME PRINCIPAL

STABILIS BONTHOUX MATH RECHERCHE

```
      DIMENSION YI(7),Y(7),S1(7),S2(7),S3(7),S4(7)
      COMMON MX,MY,C(480),E,ZACET,ROULI,TANGA,ZK1,ZK2,ZK3
      F(V)=((1.+E*COS(V))*(1.+E*COS(V)))*B
      FN1(Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7,U)=-(0.5)*(Y2*(Y5-2.*U*(Y2*Y4-Y1*
     1Y3))+Y3*(Y6-2.*U*(Y3*Y4+Y1*Y2))+Y4*(Y7-U*(2.*(Y1*Y1+Y4*Y4)
     2-1.)))
      FN2(Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7,U)=(0.5)*(Y1*(Y5-2.*U*(Y2*Y4-Y1*Y3))
     1+Y3*(Y7-U*(2.*(Y1*Y1+Y4*Y4)-1.))-Y4*(Y6-2.*U*(Y3*Y4+Y1*Y2)))
      FN3(Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7,U)=(0.5)*(Y4*(Y5-2.*U*(Y2*Y4-Y1*Y3))
     1+Y1*(Y6-2.*U*(Y3*Y4+Y1*Y2))-Y2*(Y7-U*(2.*(Y1*Y1+Y4*Y4)-1.)))
      FN4(Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7,U)=(0.5)*(-Y3*(Y5-2.*U*(Y2*Y4-Y1*Y3))
     1+Y2*(Y6-2.*U*(Y3*Y4+Y1*Y2))+Y1*(Y7-U*(2.*(Y1*Y1+Y4*Y4)-1.)))
      FN5(Y1,Y2,Y3,Y4,Y6,Y7,R)=Y6*Y7-12.*GO*RO*RO*(Y1*Y3+Y2*Y4)
     1*(Y2*Y3-Y1*Y4)/(R*R*R)
      FN6(Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y7,R)= Y5*Y7-6.*GO*RO*RO*(Y1*Y3+Y2*Y4)*(2.
     1*(Y1*Y1+Y2*Y2)-1.)/(R*R*R)
```

.../...

```
      FN7(Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,R)=Y5*Y6-6.*GO*RO*RO*(Y2*Y3-Y1*Y4)*(2.*
     1(Y1*Y1+Y2*Y2)-1.)/(R*R*R)
      MX=3
      MY=2
      PI=3.1415926536
      READ(2,100)H,E,PAS,M,N,ZACET,ROULI,TANGA
  100 FORMAT(F7.0,F5.3,F3.0,2I3,3F2.0)
      RO=6372000.
      GO=9.81
      G=SQRT(GO)
      P=(RO+H)/(1.-E)
      B=(RO*G)/((P*(1.-E*E))**(3./2.))
      TEMPS=0.
      V=0.
      UZERO=F(V)
      READ(2,102)ZK1,ZK2
  102 FORMAT(2F5.2)
      ZK3=-(ZK1+ZK2)/(1.+ZK1*ZK2)
      TETA1=ZACET*PI/180.
      TETA2=ROULI*PI/180.
      TETA3=TANGA*PI/180.
      TETP1=0.
      TETP2=0.
      TETP3=0.
      PZERO=TETP1*COS(TETA2)*COS(TETA3)+TEP2*SIN(TETA3)+UZERO*(SIN(TET
     1A1)*SIN(TETA3)-COS(TETA1)*SIN(TETA2)*COS(TETA3))
      QZERO=-(TEP1*COS(TETA2)*SIN(TETA3))+TETP2*COS(TETA3)+UZERO*(SIN(
     1TETA1)*COS(TETA3)+COS(TETA1)*SIN(TETA2)*SIN(TETA3))
      RZERO=TETP1*SIN(TETA2)+TETP3+UZERO*COS(TETA1)*COS(TETA2)
      QO=COS(TETA1/2.)*COS(TETA2/2.)*COS(TETA3/2.)-SIN(TETA1/2.)*SIN(TE
     1TA2/2.)*SIN(TETA3/2.)
      Q1=COS(TETA1/2.)*SIN(TETA2/2.)*SIN(TETA3/2.)+SIN(TETA1/2.)*COS(TE
     1TA2/2.)*COS(TETA3/2.)
      Q2=COS(TETA1/2.)*SIN(TETA2/2.)*COS(TETA3/2.)-SIN(TETA1/2.)*COS(TE
     1TA2/2.)*SIN(TETA3/2.)
      Q3=SIN(TETA1/2.)*SIN(TETA2/2.)*COS(TETA3/2.)+COS(TETA1/2.)*COS(TE
     1TA2/2.)*SIN(TETA3/2.)
      W=QO*QO+Q1*Q1+Q2*Q2+Q3*Q3
      D=P*(1.+E)-RO
      R=RO+H
      YI(1)=QO
      YI(2)=Q1
      YI(3)=Q2
      YI(4)=Q3
      YI(5)=PZERO
      YI(6)=QZERO
      YI(7)=RZERO
      DO 10 I=1,7
   10 Y(I)=YI(I)
      U=UZERO
      ZK=1.
      C(1)=V
      C(N+2)=ZACET
      N1=2*(N+1)+1
```

.../...

```
      C(N1)=ROULI
      N2=3*(N+1)+1
      C(N2)=TANGA
      DO 65 L=1,N
      DO 66 J=1,M
      Y1=Y(1)
      Y2=Y(2)
      Y3=Y(3)
      Y4=Y(4)
      Y5=Y(5)
      Y6=Y(6)
      Y7=Y(7)
C        CALCUL DE KO
      DO 30 I=1,7
      GO TO (21,22,23,24,25,26,27),I
   21 T=FN1(Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7,U)
      GO TO 30
   22 T=FN2(Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7,U)
      GO TO 30
   23 T=FN3(Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7,U)
      GO TO 30
   24 T=FN4(Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7,U)
      GO TO 30
   25 T=FN5(Y1,Y2,Y3,Y4,Y6,Y7,R)*ZK1
      GO TO 30
   26 T=FN6(Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y7,R)*ZK2
      GO TO 30
   27 T=FN7(Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,R)*ZK3
   30 S1(I)=PAS*T
      A1=Y(1)+S1(1)/2.
      A2=Y(2)+S1(2)/2.
      A3=Y(3)+S1(3)/2.
      A4=Y(4)+S1(4)/2.
      A5=Y(5)+S1(5)/2.
      A6=Y(6)+S1(6)/2.
      A7=Y(7)+S1(7)/2.
C        CALCUL DE K1
      DO 40 I=1,7
      GO TO (31,32,33,34,35,36,37),I
   31 T=FN1(A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,U)
      GO TO 40
   32 T=FN2(A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,U)
      GO TO 40
   33 T=FN3(A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,U)
      GO TO 40
   34 T=FN4(A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,U)
      GO TO 40
   35 T=FN5(A1,A2,A3,A4,A6,A7,R)*ZK1
      GO TO 40
```

.../...

```
   36 T=FN6(A1,A2,A3,A4,A5,A7,R)*ZK2
      GO TO 40
   37 T=FN7(A1,A2,A3,A4,A5,A6,R)*ZK3
   40 S2(I)=PAS*T
      A1=Y(1)+S2(1)/2.
      A2=Y(2)+S2(2)/2.
      A3=Y(3)+S2(3)/2.
      A4=Y(4)+S2(4)/2.
      A5=Y(5)+S2(5)/2.
      A6=Y(6)+S2(6)/2.
      A7=Y(7)+S2(7)/2.
C        CALCUL DE K2
      DO 50 I=1,7
      GO TO (41,42,43,44,45,46,47),I
   41 T=FN1(A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,U)
      GO TO 50
   42 T=FN2(A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,U)
      GO TO 50
   43 T=FN3(A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,U)
      GO TO 50
   44 T=FN4(A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,U)
      GO TO 50
   45 T=FN5(A1,A2,A3,A4,A6,A7,R)*ZK1
      GO TO 50
   46 T=FN6(A1,A2,A3,A4,A5,A7,R)*ZK2
      GO TO 50
   47 T=FN7(A1,A2,A3,A4,A5,A6,R)*ZK3
   50 S3(I)=PAS*T
      A1=Y(1)+S3(1)
      A2=Y(2)+S3(2)
      A3=Y(3)+S3(3)
      A4=Y(4)+S3(4)
      A5=Y(5)+S3(5)
      A6=Y(6)+S3(6)
      A7=Y(7)+S3(7)
C        CALCUL DE K3
      DO 60 I=1,7
      GO TO (51,52,53,54,55,56,57),I
   51 T=FN1(A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,U)
      GO TO 60
   52 T=FN2(A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,U)
      GO TO 60
   53 T=FN3(A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,U)
      GO TO 60
   54 T=FN4(A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,U)
      GO TO 60
   55 T=FN5(A1,A2,A3,A4,A6,A7,R)*ZK1
      GO TO 60
   56 T=FN6(A1,A2,A3,A4,A5,A7,R)*ZK2
      GO TO 60
   57 T=FN7(A1,A2,A3,A4,A5,A6,R)*ZK3
```

.../...

```
   60 S4(I)=PAS*T
C          CALCUL DES NLLES VALEURS DES INTEGRALES
      DO 61 I=1,7
   61 Y(I)=Y(I)+(S1(I)+2.*S2(I)+2.*S3(I)+S4(I))/6.
      W=Y(1)*Y(1)+Y(2)*Y(2)+Y(3)*Y(3)+Y(4)*Y(4)
      SA1=PAS*U
      A1=V+SA1/2.
      U=F(A1)
      SA2=PAS*U
      A1=V+SA2/2.
      U=F(A1)
      SA3=PAS*U
      A1=V+SA3
      U=F(A1)
      SA4=PAS*U
      V=V+(SA1+2.*SA2+2.*SA3+SA4)/6.
      U=F(V)
      R=(RO+H)*SQRT(UZERO/U)
   66 CONTINUE
C          CALCUL DES NOUVEAUX TETAI
      A32=2.*((Y(3)*Y(4))-(Y(1)*Y(2)))
      A33=2.*((Y(1)*Y(1))+(Y(4)*Y(4)))-1.
      A11=2.*((Y(1)*Y(1))+(Y(2)*Y(2)))-1.
      A21=2.*((Y(2)*Y(3))-(Y(1)*Y(4)))
      A31=2.*((Y(2)*Y(4))+(Y(1)*Y(3)))
      D=-(A32/A33)
      G=-(A21/A11)
      TETA1=ATAN(D)*(180./PI)
      COT2=SQRT(1-A31*A31)
      TETA2=ATAN(A31/COT2)*(180./PI)
      TETA3=ATAN(G)*(180./PI)
      TEMPS=L*M*PAS
      C(L+1)=V
      J1=L+2+N
      C(J1)=TETA1
      J2=L+1+2*(N+1)
      C(J2)=TETA2
      K3=L+1
      J3=L+1+3*(N+1)
      C(J3)=TETA3
   65 CONTINUE
      CALL LINK(PPLOT)
      END
```

INTEGRATION DE L'EQUATION RELATIVE AU MOUVEMENT DU CORPS

DANS LE PLAN DE TANGAGE SUR ORBITE ELLIPTIQUE.

PROGRAMME PRINCIPAL

STABILIS BONTHOUX MATH RECHERCHE

```
      DIMENSION Y1(2),Y(2),S1(2),S2(2),S3(2),S4(2),A(480),C(240)
C     LE PAS D'INTEGRATION EST 6 DEGRES
C     LE NOMBRE D'ITERATIONS AVANT CHAQUE SORTIE EST 5
      FN1(V,Y1,Y2)=(2.*E*SIN(V)*(1.+Y1)+3.*ZKZ3*SIN(2.*Y2)/2.)/(1.+E*
     1COS(V))
      FN2(V,Y1,Y2)=Y1
      PI=3.1415926536
    5 READ(2,100)Y10,Y20,ZKZ3
  100 FORMAT(3F10.5)
      E=0.03
      H=6.
      V=0.
      YI(1)=Y10
      Y1(2)=Y20
      DO 10 I=1,2
   10 Y(I)=YI(1)
      K=1
      A(K)=V
      A(K+240)=Y20
      C(K)=Y10
      PAS=H*PI/180.
      DO 65 L=1,239
      DO 66 J=1,5
      Y1=Y(1)
      Y2=Y(2)
C        CALCUL DE KO
      DO 30 I=1,2
      GO TO (21,22),I
   21 T=FN1(V,Y1,Y2)
      GO TO 30
   22 T=FN2(V,Y1,Y2)
   30 S1(I)=PAS*T
      A1=Y(1)+S1(1)/2.
      A2=Y(2)+S1(2)/2.
C        CALCUL DE K1
      DO 40 I=1,2
      GO TO (31,32),I
   31 T=FN1(V,A1,A2)
      GO TO 40
```

.../...

```
   32 T=FN2(V,A1,A2)
   40 S2(I)=PAS*T
      A1=Y(1)+S2(1)/2.
      A2=Y(2)+S2(2)/2.
C        CALCUL DE K2
      DO 50 I=1,2
      GO 50 (41,42),I
   41 T=FN1(V,A1,A2)
      GO TO 50
   42 T=FN2(V,A1,A2)
   50 S3(I)=PAS*T
      A1=Y(1)+S3(1)
      A2=Y(2)+S3(2)
C        CALCUL DE K3
      DO 60 I=1,2
      GO TO (51,52),I
   51 T=FN1(V,A1,A2)
      GO TO 60
   52 T=FN2(V,A1,A2)
   60 S4(I)=PAS*T
C        CALCUL DES NLLES VALEURS DES INTEGRALES
      DO 61 I=1,2
   61 Y(I)=Y(I)+(S1(I)+2.*S2(I)+2.*S3(I)+S4(I))/6.
      V=V+PAS
   66 CONTINUE
      K=K+1
      A(K)=V
      A(K+240)=Y(2)
      C(K)=Y(1)
   65 CONTINUE
      YS=1./6.28
      XS=5.
      CALL SCALF(XS,YS,0.,0.)
      CALL FGRID(0,-0.70,0.,0.10,14)
      CALL FPLOT(2,0.70,0.)
      CALL POINT(2)
      CALL FCHAR(0.70,-4.,0.15,0.15,-1.57)
      WRITE(7,70)E,ZKZ3,Y10
   70 FORMAT('RADIAN',20X,'EXCENTRICITE=',F5.2,10X,'ZK3=',F7.4,10X
     1,'TETA3 PRIM ZERO=',F8.3,2X,'RADIAN/SECONDE')
      DO 81 J=1,15
      YVAR=0.80-J*0.10
      CALL FCHAR(YVAR,-0.5,0.10,0.10,-1.57)
   81 WRITE(7,71)YVAR
   71 FORMAT(F5.2)
      CALL FGRID(3,0.,0.,3.14,38)
      CALL FPLOT(2,0,-122.)
      CALL POINT(3)
      CALL FCHAR(-0.04,-122.,0.15,0.15,-1.57)
      WRITE(7,72)
   72 FORMAT('PIS')
      DO 82 J=1,38
```

.../...

```
      JVAR=39-J
      ZVAR=-118.+(J-1)*3.14
      CALL FCHAR(-0.04,ZVAR,0.10,0.10,-1.57)
   82 WRITE(7,73)JVAR
   73 FORMAT(I2)
      XB=A(241)
      YB=A(1)
      CALL FPLOT(-2,XB,YB)
      DO 90 I=2,228
      YB=A(I)
      XB=A(I+240)
      IF(XB-1.0) 91,91,92
   92 XB=1.0
      GOTO 90
   91 IF(XB+1.) 93,93,90
   93 XB=-1.
   90 CALL FPLOT(0,XB,YB)
      GO TO 5
      END
```

RECHERCHE DES RACINES D'UN SYSTEME DE 3 EQUATIONS

TRANSCENDANTES (BESSEL J_0, J_1, J_2, J_3, J_4)

PROGRAMME PRINCIPAL

```
      REAL JOA,J1A,J2A,J3A,J4A,JOB,J1B,J2B,JOC,J1C,J2C
      PI=3.141592
    8 READ(2,99)E,A,B
   99 FORMAT(F5.2,F8.5,F8.5)
      WRITE(3,98)E
   98 FORMAT(1H1,10X,'EXCENTRICITE=',F5.2,//)
      DC=0.0001
      D=0.0000001
      ZA=A
      CALL BESJ(ZA,0,BJ,D,IER)
      JOA=BJ
      CALL BESJ(ZA,1,BJ,D,IER)
      J1A=BJ
      CALL BESJ(ZA,2,BJ,D,IER)
      J2A=BJ
      CALL BESJ(ZA,3,BJ,D,IER)
      J3A=BJ
      CALL BESJ(ZA,4,BJ,D,IER)
      J4A=BJ
      ZB=B
      CALL BESJ(ZB,0,BJ,D,IER)
      JOB=BJ
      CALL BESJ(ZB,1,BJ,D,IER)
      J1B=BJ
      CALL BESJ(ZB,2,BJ,D,IER)
      J2B=BJ
      WRITE(3,112)A,B
  112 FORMAT(7X,'A=',F10.5,'RADIAN',7X,'B=',F10.5,'RADIAN')
      ZZA=A*360./(2.*PI)
      ZZB=B*360./(2.*PI)
      WRITE(3,113)ZZA,ZZB
  113 FORMAT(7X'  ',F10.5,'DEGRES',7X,'  ',F10.5,'DEGRES',/)
      WRITE(3,111)
  111 FORMAT(8X,'C',9X,'OMEG1',7X,'OMEG2',7X,'OMEG3',7X,'D12',9X,'
     1D13',9X,'D21',9X,'D23',9X,'D31',9X,'D32',/)
      C=0.0001
    5 ZC=C
      CALL BESJ(ZC,0,BJ,D,IER)
      JOC=BJ
      CALL BESJ(ZC,1,BJ,D,IER)
      J1C=BJ
      CALL BESJ(ZC,2,BJ,D,IER)
```

.../...

```
      J2C=BJ
      OMEG1=(A-4.*E)/(JOC*(J1A*JOB-J3A*J2B)-J1C*(JOA*J2B-J2A*JOB))
      OMEG2=(4.*B-3.*E*(A+C)/2.)/J1B/(JOA*JOC-J1C*J1A-J4A*JOC-2.*J3A*
     1J1C)
      OMEG3=(9.*C-4.*E*B)/(JOC*(J3A*JOB-J1A*J2B)+JOB*(JOA*J1C-J3A*
     1J2C))
      D12=-(A-4.*E)+OMEG2*(JOC*(J1A*JOB-J3A*J2B)+J1C*(JOA*J2B-J2A*
     1JOB))
      D13=-(A-4.*E)+OMEG3*(JOC*(J1A*JOB-J3A*J2B)+J1C*(JOA*J2B-J2A*
     1JOB))
      D21=-4.*B+3.*E*(A+C)2.+OMEG1*J1B*(JOA*JOC-J1A*J1C-J4A*JOC-2.
     1*J3A*J1C)
      D23=-4.*B+3.*E*(A+C)/2.+OMEG3*J1B*(JOA*JOC-J1A*J1C-J4A*JOC-3.
     1*J3A*J1C)
      D31=-9.*C+4.*E*B+OMEG1*(JOC*(J3A*JOB-J1A*J2B+JOB*(JOA*J1C-J3A
     1*J2C))
      D33=-9.*C+4.*E*B+OMEG2*(JOC*(J3A*JOB-J1A*J2B)+JOB*JOA*J1C-
     1J3A*J2C))
      WRITE(3,100)C,OMEG1OMEG2,OMEG3,D12,D13,D21,D23,D31,D32
  100 FORMAT(10(2X,F10.6))
      C=C+DC
      IF(D-0.01)7,8,8
    7 IF(C-0.002)5,6,6
    6 DC=0.001
      GO TO 5
      END
```

TABLE DES FIGURES

Figures		Pages
1ère Partie		
1	Angles d'Euler	12
2	Paramètres d'orbite	27
2ème Partie		
1	Système de référence	43
2	Angles de Lacet, Roulis, Tangage	44
3-4	Carte des configurations 1 et 2	49-50
5	$K_3=f(K_1,K_2)$	51
6-6bis	Cas linéaire. Stabilité	60-61
7-8	Courbes de résonance "interne" et "externe"	62-63
9 à 11	Cartes de stabilité pour e = o	73 à 75
12 à 15	Cartes de stabilité pour e = 0,03	77 à 80
16 à 18	Cartes de stabilité pour e = 0,08	82 à 84
19 à 23	Solutions pour e variable	86 à 90
24 à 27	Variation du tangage seul si e = 0.03	95 à 98
28et 29	Evolution du tangage maximum si ε et Ω^2 varient	99 -100
30 à 40	Représentation de l'évolution du Tangage dans le plan de phase	102 à 112
41 à 43	Amplitude des solutions périodiques	113 à 115
44	Amplitude du 1° harmonique	117
45	Amplitude relative du 2° harmonique	120
46	Amplitude du 1° sous harmonique	125
47et 48	Courbes de bifurcation	131

B I B L I O G R A P H I E

APPEL.P. "Cours de Mécanique. Figures d'Equilibre d'une Masse Liquide en Rotation, Etude de la Stabilité des Figures d'Equilibre". Tome IV. Chapitre VIII.

BELETSKII.V.V. (1) The Libration of a Satellite"
Traduit de Isskusstvennye Sputniki Zemli n°3.1959 pp.13-31 dans Nasa Technical Translation F 10 Mai 1960.

(2) "Orbit of an equatorial earth satellite"
Traduit de Isskusstvennye Sputniki Zemli dans Artificial earth satellite. Tome 13.1962 pp.53-60.

(3) Libration of a satellite in an elliptical orbit"
Traduit de Isskusstvennye Sputniki Zemli dans Artificial earth satellite. Tome 16. 1963 pp. 42-52.

(4) "Some aspects of translational - rotational motion of a rigid body in a newtonian field of force"
Traduit de Isskusstvennye Sputniki Zemli dans Artificial earth satellite. Tome 16. 1963 pp. 65-92.

(5) "Libration Boundaries of a Triaxial Satellite in a Gravitational Field"
P.M.M. Vol.31. n°6. 1967. pp.1107-1111.

(6) "New Investigations of Motion of an Artificial Satellite About its Center of Mass"
Symposium on Satellites Dynamics. XII° COSPAR Session. Prague 11.12 Mai 1969.

BREAKWELL J.V. AND PRINGLE R.J.
"Non linear resonances affecting gravity gradient stability"
Proceedings of the 16th International Congress Athènes Oct.1965. Astrodynamics Gauthier-Villars- Paris 1966. pp.305-325.

BRERETON.R.C ET MODI.V.J.
(1) "On the stability of Planar Libration of a Dumbell Satellite in an Elliptic Orbit"
Journal of the Royal Aeronautical Society. Vol.70. Dec.1966. pp. 1098-1102.

(2) "Periodic Solutions Associated With The Gravity Gradient Oriented System"
Part 1 - Analytical and Numerical Determination
AIAA.J. Vol.7. n°7.1969. pp.1217-1225
et
Part 2 - Stability Analysis
AIAA.J. Vol.7. n°8.1969. pp.1465-1468.

.../...

BOGOLIUBOV.N.N. AND MITROPOLSKI.Y.A.

(1) "Asymptotic Methodes in the Theory of Non-Linear Oscillations"
Translated from Russian. Hindustan Publishing Corpn (India) Delhi 6. 1961.

(2) "Les Methodes Asymptotiques en théorie des Oscillations Non-Linéaires"
Gauthier - Villars 1962.

CESARI.L. (1) "Asymptotic Behaviour and Stability Problems in Ordinary Differential Equations"
Springer, Verlag Berlin 1959.

(2) "Funtional Analysis And Periodic Solutions of Non-Linear Differential Equations"
Contributions to Differential Equations Vol.1. n°2 Sept.1963.

CUNNINGHAM W.J. (1) "Introduction to Non-Linear Analysis"
Mac Grawhill. New York 1958.

(2) "Analyse Non Linéaire". Résolutions des Equations Différentielles"
Dunod 1963.

DEBRA.D.B. (1) "Vectors and Dyadics : The Natural Tools of Space Vehicle Mechanics"
Proceedings of the IVth Western Regional Meeting of the American Astronautical Society.1.3 Août 1961. San Francisco. California Vol. 9 Advances Astronautical Sciences.

(2) "The large attitude motions and stability, due to gravity, of a satellite with passive damping on an orbit of arbitrary eccentricity about an oblate body"
Stanford University Department of Aeronautic and Astronautics. Daniel Brown DEBRA Ph.D 1962 (SUDAER report n° 126 Stanford University).

(3) "Principles and Developments in Passive Attitude Control"
Science and Technologie Series. Vol 9.AAS Publications 1966. pp.159-224.

DEBRA D.B. AND DELP R.H.
"Rigid Body Attitude Stability and Natural Frequencies in a Circular Orbit"
Journal of the Astronautical Sciences Vol. 8, n°1 - Spring 1961. pp.14-17.

DUBOSHIN G.N. "The Differential Equations of Translational - rotational motion of mutually attrating bodies"

.../...

Traduit de Astronomicheskii Zhurnal. Vol.35 n°2. 1958 dans Soviet Astronomy A.J. Vol.2 1959. pp.239-250.

(2) "On one particular case of the problem of the Translational Rotational motion of two bodies"
Traduit de Astron.Zhurnal Vol.36 n°1. 1959 dans Soviet Astronomy A.J. Vol.3. 1959/60 p.p. 154-165.

(3) "On the stability of regular motions of artificial celestial bodies"
Traduit de Astron. Zhurnal Vol.36 n°4.1959 dans Soviet Astronomy Vol.3 n°4 1959/60 pp. 702-712.

(4) "Rotational Motion of artificial bodies in space"
ARS. Journal Supplement. Tome 31.1961. pp.1345-1350.
Traduit de Bulletin of the Institut of Theoretical Astronomy 1960 vol.7n°7.

(5) "Sur le mouvement de translation-rotation des corps celestes artificiels". IUTAM Symposium. Paris 28-30 Mai 1962. Dynamics of satellites edited by Maurice ROY pp.14-20.

FISCHER "Universal Mechanics and Hamilton's Quaternions"
Axion Institute. Stockolm 1951.

GILLE.J.CH., DECAULNE P. ET PELEGRIN M.
"Methodes d'Etudes des Systèmes Asservis Non-Linéaires"
Dunod. Paris 1967. 2ème édition.

HAYASHI.C, UEDA.Y, KAWAKAMI.H
"Transformation Theory As Applied to the Solutions of Non-Linear Differential Equations of the Second Order"
International Journal of Non-Linear Mechanics. Vol.4 Sept.1968 pp.235-255.

HAMMERSTEIN.A. "Nicht Lineare Integralgleichungen Nebst Anwendungen"
Acta.Math. Tome 54.1930 pp.117-176.

HENON M. AND HEILES C. "The Applicability of the Third Integral of Motion : Some Numerical Experiments"
Astronomical Journal Vol.69 n°1, Fév. 1964 pp.73-79.

.../...

ICKES B.P.

"A New Method For Performing Digital Control System Attitude Computations Using Quaternions"
AIAA J. Vol.8 n°1.1970.pp.13-17.

JEAN Michel

"Sur les Solutions Periodiques des Equations Différentielles de la Mecanique"
Thèse d'Etat soutenue le 6 Juillet 1965. Faculté des Sciences de l'Université d' Aix. Marseille.

JEFFREYS W.H.

"Some Dynamical System of two Degrees of Freedom in Celestral Mechanics"
Astronomical Journal. Vol.71. n°5 Juin 1966 pp.306-313.

KANE T.R.

(1) "Attitude Stability of Earth Pointing Satellites"
AIAA Journal Vol.3 n°4. Avril 1965. pp. 726-731.

(2) "Gravity Torque Effects"
AIAA. Journal Aug. 1966 pp.1454-55.

KLAT Anis

(1) "Attitude desSatellites autour de leur centre des masses"
Art.I. Orbite circulaire.
Publications de l'Université LIBANAISE. Section des Etudes Scientifiques IV. Beyrouth 1966.

(2) "Attitude des satellites autour de leur centre des masses"
Art.II. Orbite elliptique (1)
Publications de l'Université Libanaise. Section des Etudes Scientifiques IV. Beyrouth 1966.

(3) "Mouvement des satellites autour de leur centre des masses"
Art.III. Orbite elliptique (2)
Publications de l'Université Libanaise. Section des Etudes Scientifiques V. Beyrouth 1967.

(4) "Trajectoires planes dans le problème des deux corps solides"
Publications de l'Université Libanaise. Section des Etudes Scientifiques VI. Beyrouth 1968.

KLEMPERER W.B AND BAKER R.M.L. Jr.

"Satellite Librations"
Proceedings of the 7th International Astronautical Congress Rome 1956 pp.3-21; 1957 Astronautica Acta 3 pp.16-27.

.../...

KONDURAR'V.T. (1) "The general case of the translational rotational motion of a spheroid attracted by a sphere"
Traduit de Astronomicheskii Zhurnal. Vol 38 n°2 pp.310-324 dans Soviet Astronomy A.J. Vol.5 n°2 1961/62 pp.232-241.

(2) "Influence of the figure of the moon on its motion"
Traduit de Astron.Zhurnal Vol.40 n°4 pp.757-766 dans Soviet Astronomy A.J. Vol. 7 n°4.1964 pp.576-582.

KOVALEVSKY J. "Introduction à la mécanique céleste"
Collection Armand Colin. Section Mathématiques n°370.

LAGRANGE J.L. "Théorie de la libration de la lune"
Oeuvres. Tome V. p.1.

LANGE B. "Linear Coupling Between Orbital and Attitude Motions of a Rigid Body"
The Journal of the Astronautical Sciences Vol.XVIII n°3 Nov.Dec.1970 pp.150-167.

LAPLACE P.S. "Des mouvements de la lune autour de son centre de gravité"
Traité mécanique céleste Tome II.1798 Chap.II.

LIAPUNOV A.M. "Problème Général de la Stabilité du Mouvement".
Annales de la Faculté des Sciences de l' Université de Toulouse pour les Sciences Mathématiques et les Sciences Physiques Vol.2 n°9. 1907.

LUR'E.A.I. (1) "The moment of the Gravitational Forces Acting on a Satellite"
P.MM. Vol.27 n°2.1963. pp.317-378.

(2) "The notion of a solid body in a newtonian central force field"
Traduit de Kosmicheskie Issledovania Vol. 3 n°3 pp.347-350. Mai-Juin 1965 dans Cosmic Research.

(3) "Mécanique Analytique"
Masson et Cie Editeurs 1968. Tomes 1 et 2.

MATHEMATIQUES APPIED TO PHYSICS
Edited by E.Roubine. Spinger Verlag. Berlin 1970.

.../...

MAWHIN.J. (1) "Application directe de la Methode Générale de Cesari à l'étude des solutions périodiques des systèmes différentiels faiblement Non-linéaires"
Bulletin de la Société Royale des Scienc de Liège 36° année n°5-6.1967. pp.193-21

(2) "Degré topologique et Solutions Periodiques des systèmes différentiels non-linéaires"
Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège. 38° année n°7-8. 1969. pp.308-398.

MEIROVITCH.L. "On the Effect of Higher-Order Inertia Integrals on the Attitude Stability of Earth-Pointing Satellites"
The Journal of the Astronautical Sciences Vol.XV n°1 Janv.Fév. 1968 pp.14-18.

MICHELSON Irving (1) "Coupling Effects of Gravity Gradient/Satellite Motions"
American Rocket Society Journal . Vol. 32. Nov.1962. p.1735.

(2) "Librational dynamic-response limits of gravity-gradient satellites"
AIAA J. Vol.1. 1963 p.216.

(3) "Orbit-Resonance of satellites in Librational Motion"
AIAA J. Vol.1. 1963 pp.489-490.

(4) "Equilibrium Orientations of gravity gradient satellites"
AIAA J. Vol.1.1963 pp.493 et AIAA J. Vol.2 n°7 July 1964.

(5) "A Note on Lunar Librations"
AIAA J. Vol.1 n°11.1963 pp.2629-2630.

(6) "Euler Angles for Libration Analysis"
AIAA J. Vol.2 n°8.1964.pp.1469-1470.

MICHELSON.J. AND DUNCOMBE R.L.
"Non-linear Analysis of physical Librations - 1 New formulation and équilibrium orientations deduced from an integral of motion"
Proceedings of the XVth International Astronautical Congress Varsovie Oct.1964

MINORSKI.N. (1) "Non-linear Oscillations"
D.Van Nostrand Co, Inc, Princeton N.J. 1962

(2) "Theorie des oscillations"
Memorial des Sciences Mathématiques. Fascicule CLXIII Gauthier-Villars Editeur 1967.

.../...

MORAN J.P.

"Effects of Plane Librations on the Orbital Motion of Dumbbell Satellite"
A.R.S. Journal Ang 1961 pp.1089-1096.

NIDEY R.A.

"Gravitational Torque on a Satellite of Arbitrary Shape"
A.R.S.J. Vol. 30. 1960. pp.203-204.

PASCAL Madeleine

"Sur le mouvement d'un triple batonnet dans un champ Newtonien"
C.R. Acad. Sciences. Paris t.265.
6 Déc. 1967 pp.790-792.

PRINGLE.R.Jr.

"On the Capture, Stability, and Passive Damping of Artificial Satellites"
Doctoral Dissertation. Ph.D Stanford University California. Juin 1964
Aussi
Nasa C.R. 139 Déc. 1964.

ROBERSON, R.E.

(1) "Attitude Control of a satellite vehicle : an outline of the problems"
Proceedings of the VIII° International Astronautical Congress Barcelone
Oct.1957. pp.317-339.

(2) "Gravitational torque on a satellite vehicle"
Journal of Franklin Institute 265. n°1
Janv. 1958. pp.13-22.

(3) "Attitude Control of satellites and Space vehicles"
Advances in space Science Edited by Frederick Ordway, III Vol.2. Academie Press 1960.pp.351-436.

(4)"Alternate Form Of a Result by NIDEY"
A.R.S.J. Vol.11. 1961.pp 1292-1293.

(5) "Torque on a satellite in a General Gravitational Field"
AIAA.J. Vol.6 n°3 Mars 1968 pp.572-574.

ROBERSON R.E.AND TATISTCHEFF D.

"The potentiel Energy of a small rigid body in the gravitational field of an oblate spheroïd"
Journal of Franklin Institute 262
pp.209-214.

ROSEAU M.

(1) "Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité"
Springer Verlag 1966.

(2) "Solutions périodiques ou presque périodiques des systèmes différentiels de la mécanique non linéaire.
Publication du Département de Mécanique de la Faculté des Sciences de Paris
1970.

.../...

SCHECHTER H.B. "Dumbbell Librations in Elliptic Orbits"
AIAA. Journal. Vol.2 1964 pp.1000-1003.

SCHINDLER G.M. "Satellite librations in the vicinity of Equilibrium solutions"
Astronautica Acta. Vol.65 n°5 1960 pp.233-240.

SCHLEGEL L.B. "Contribution of Earth Oblateness To Gravity Torque on a Satellite"
AIAA.J. Vol.4 n°11 Nov.1966 pp.2075-2077.

SEDA V. "An Application of Green's function in the Differential Equations"
Differential Equations and their Applications. Proceedings of the Conference hield in Bratislava. Sept.1966.

SYMPOSIUM ON PASSIVE GRAVITY GRADIENT STABILIZATION
Ames Research Center. Moffet Field. California 10-11 Mai 1965
Nasa Report SP 107.

SYNGE.J.L. "On the behaviour according to newtonian theory of a plumb line or pendulum attached to an artificial satellite"
Proceedings of the Royal Irish Academy. Vol.60 Section A Janv.1959 pp. 1-10.

TISSERAND F. "Traité de Mécanique Celeste"
Tomes 1 et 2 (Nouveau tirage 1960).

TODA F.N. "The Configurations of an Orbiting Satellite for Stable Oscillations"

TRICOMI F.G. "Integral Equations"
Pure and Applied Mathematics. Vol.5 4° Edition. Avril 1967.

VIBRATIONS FORCEES DANS LES SYSTEMES NON LINEAIRES (Les)
Colloque International du C.N.R.S. n°148. 1965 Marseille 7 au 12 Sept. 1964.

WIGGINS.L.E. "Relative Magnitudes of the Space-Environmental Torques on a satellite"
.AIAA.J. Vol.2.1964. pp.770-771.

.../...

YU E.Y

"Long-Term Coupling Effects Between Librational and Orbital Motion of a Satellite"
AIAA Journal Vol.2 n°3 Mars 1964
pp.553-555.

ZLATOUSTOV V. - OKHOTSIMSKII D. - SARYCHEV V.A AND TORZHEVSKII A.P.

"A study of a satellite's Oscillations in the Plane of an Elliptical Orbit"
Proceedings of the 15th International Zstronautical Congress Varsovie.
Octobre 1964. pp.215-226.
Aussi dans
Proceedings of the 11th International Congress of Applied Mechanics Edited
pp.436-439.
Aussi
Traduit de Kosmicheskii Issledovania
Vol.2 n°5 pp.657-666 Sept.Oct. 1964
Dans Cosmic Reseach.

ACADÉMIE DE PARIS

UNIVERSITÉ DE PARIS VI

4, Place Jussieu - 75230 PARIS-CEDEX 05

SERVICE DE LA SCOLARITE

Bureau des Enseignements du 3e cycle

TÉLÉPHONE : 336-25-25 - 325-12-21

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : DOCTORAT ES SCIENCES

THESE DE : SCIENCES PHYSIQUES

NOM : Monsieur BONTHOUX

Prénoms : Claude

né le 14 juin 1937 à VANDOEUVRE Dépt : Meurthe & Moselle

1ère THESE : CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA STABILITE D'ATTITUDE DES SATELLITES ARTIFICIELSPASSIFS PARCOURANT UNE TRAJECTOIRE ELLIPTIQUE.

2e THESE (Propositions faites par l'Université) : APPLICATION DE LA THEORIE DES GRAPHES ET DES FAMILLES LINEAIRES DE TORSEURS A L'ANALYSE DE LA MOBILITE DES MECANISMES.

PRESIDENT : M. SIESTRUNCK

EXAMINATEURS : M. BROUSSE
M. THIRY

Vu et Approuvé

PARIS, le 11 mai 1973

Le Président

de l'Université de PARIS VI

Sc.3e c. 72-09